Méthode de résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques 3D sur des domaines non bornés par les transformations intégrales de Hankel

On aborde en quelques pages les problèmes aux limites cylindriques sur des domaines non bornés radialement et partiellement bornés sur l'axe z. Les conditions aux limites sur l'axe z sont inhomogènes. Les solutions de base obtenues par séparation sont les suivantes dans le cas où les conditions aux limites présentent une dépendance d'angle polaire :

$$T(r,\theta,z) = \left(A\ Cos(n\theta) + B\ Sin(n\theta)\right)\left(C\ Cosh(\lambda z) + D\ Sinh(\lambda z)\right)\left(E\ J_n(\lambda r) + F\ Y_n(\lambda r)\right)$$

Si les conditions aux limites sont axi-symétriques (pas de dépendance d'angle polaire), alors les solutions se restreignent au cas n=0 :

$$T(r,z) = \left(C\ Cosh(\lambda z) + D\ Sinh(\lambda z)\right)\left(E\ J_0(\lambda r) + F\ Y_0(\lambda r)\right)$$

Si le domaine radiale est non borné, par exemple r€[0,+∞], dans ce cas les solutions séparables ne forment pas en général un système à partir duquel on peut développer une série discrète de fonctions propres notamment parce que les conditions de finitude des solutions ne peuvent être respecter en même temps en 0 et +∞ pour les fonctions radiales. Si le domaine est non borné supérieurement, r€[r0,+∞], alors toute fonction de la forme :

$$Y_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)$$

respecte manifestement une condition aux limites homogène de Dirichlet en r=r0, mais pas la condition de finitude en r=+∞.

Devant cette impossibilité de construction, on peut envisager des formes intégrales comme solutions d'un problème aux limites axi-symétrique non borné en r€[0,+∞] et borné en z avec des conditions aux limites inhomogène en z€[0,z0], soit proposer une solution de la forme :

$$T(r,z) = \int_0^{+\infty} d\lambda\, J_0(\lambda r)\left(C(\lambda)\, Cosh(\lambda z) + D(\lambda) Sinh(\lambda z)\right)$$

Les coefficients C et D sont alors devenus des fonctions du paramètre d'intégration que l'on peut considérer variant dans spectre continu de valeur propre λ. Pour cela on est aidé par l'existence d'une transformation de Hankel qui garantie le développement de toute fonction ayant les propriétés adéquates en un couple de formes intégrales dénommées couramment intégrales de Fourier-Bessel.

La plupart des exemples donnés ci-dessous sont tirés de deux ouvrages d'exemples et d'exercices de Physique Mathématique : N.N.Lebedev, Special Functions and their applications, 1965 ainsi que N.N.Lebedev, I.P.Skalskaya et Y.S.Ufliand, 1965, « Problems of Mathematical Physics », section 2 « The Hankel transform » pages 160 et suivantes. Les énoncés ont été parfois modifiés pour ne faire apparaître que la formalisation mathématique du problème aux limites de Laplace, sans se préoccuper de la forme exacte des grandeurs physiques en jeu. On utilisera également la transformation de Hankel dans la section dédiée aux systèmes de coordonnées paraboloïdal ou parabolique de révolution, en s'inspirant également des exercices proposés dans cet ouvrage.

Le théorème suivant a lieu :

Théorème de Hankel avec les fonctions de Bessel de première espèce

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,+∞) dont la variation est bornée sur tout intervalle [0,x0], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx\,|f(x)|\sqrt{x} < \infty$

Cette dernière admet la représentation intégrale suivante, dès lors que le paramètre v > -1/2, aux points de continuité de la fonction : $f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t)$

Au point de discontinuité de la fonction, on écrit :

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t)$$

Cette formule intégrale peut se décomposer afin d'introduire la transformée de Hankel de la fonction f(x) :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt\ t J_\nu(\lambda t) f(t) \quad \textit{transformée de Hankel}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_\nu(\lambda x) F(\lambda) \quad \textit{transformée inverse de Hankel}$$

Une forme équivalente est obtenue par un changement de fonctions :

$$g(x) = \sqrt{x} f(x) \quad et \quad \tilde{g}(\lambda) = \sqrt{\lambda} F(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{g}(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt\ \sqrt{\lambda t} J_\nu(\lambda t) g(t) & \textit{transformée de Hankel} \\ g(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \sqrt{\lambda x} J_\nu(\lambda x) \tilde{g}(\lambda) & \textit{transformée inverse de Hankel} \end{cases}$$

Transformation de Hankel avec les fonctions de Bessel de deuxième espèce

Un développement intégral existe utilisant les fonctions de Bessel de deuxième espèce et les fonctions de Struve pour l'inversion, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x) (la variation est bornée sur tout intervalle [0,x0], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx\,|f(x)|\sqrt{x} < \infty$*) :*

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \sqrt{\lambda x}\mathbf{H}_\nu(\lambda x) \int_0^{+\infty} dt\ \sqrt{\lambda t} Y_\nu(\lambda t) f(t) \\ Y_\nu(\lambda t) \quad \textit{fonction de Bessel de deuxième espèce} \\ \mathbf{H}_\nu(\lambda x) \quad \textit{fonction de Struve} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt\ \sqrt{\lambda t} Y_\nu(\lambda t) f(t) \\ f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \sqrt{\lambda x}\mathbf{H}_\nu(\lambda x) F(\lambda) \end{cases}$$

Une forme équivalente est obtenue par un changement de fonctions :

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \quad et \quad \tilde{g}(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{g}(\lambda)=\int_0^{+\infty} dt\; t\; g(t) Y_\nu(\lambda t) \\ g(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\; \mathbf{H}_\nu(\lambda x)\lambda\, \tilde{g}(\lambda) \end{cases}$$

<u>Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber-Orr ou Weber-Dirichlet : condition homogène de Dirichlet sur le rayon intérieur</u>

Un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x) (la variation est bornée sur tout intervalle [x0,x1], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx\,|f(x)|\sqrt{x}<\infty$*), pour des fonctions f(x) s'annulant en x=x_0 :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\; \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2}\int_{x_0}^{+\infty} dt\; t\,\Psi_\nu(\lambda,t,x_0) f(t) \quad pour \quad x>x_0>0$$

$$\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)=J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) \Rightarrow \Psi_\nu(\lambda,x_0,x_0)=0$$

$J_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de première espèce*

$Y_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de deuxième espèce*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty} dt\; t\,\Psi_\nu(\lambda,t,x_0) f(t) \\ f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\; \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda,x_0) \end{cases}$$

$$En\,cas\,de\,discontinuit\acute{e} \quad \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)=\int_0^{+\infty} d\lambda\; \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda,x_0)$$

Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber-Neumann : condition homogène de Neumann sur le rayon intérieur

Un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, avec les mêmes conditions imposées aux fonctions f(x) (la variation est bornée sur tout intervalle [x0,x1], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx\,|f(x)|\sqrt{x} < \infty$*),*

pour des fonctions f(x) dont la dérivée première s'annule en x=x_0 :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda\, \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} \int_{x_0}^{+\infty} dt\; t\, \Psi_\nu(\lambda, t, x_0) f(t) \quad pour \quad x > x_0 > 0$$

$$\Psi_\nu(\lambda, x, x_0) = J_\nu(\lambda x) Y_\nu'(\lambda x_0) - Y_\nu(\lambda x) J_\nu'(\lambda x_0) \quad avec \quad J_\nu'(x) = \left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad Y_\nu'(x) = \left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$J_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de première espèce*

$Y_\nu(\lambda x)$ *fonction de Bessel de deuxième espèce*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda, x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dt\; t\, \Psi_\nu(\lambda, t, x_0) f(t) \\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\, \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda, x_0) \end{cases}$$

$$En\,cas\,de\,discontinuit\acute{e} \quad \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = \int_0^{+\infty} d\lambda\, \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda, x_0)$$

Transformation sur l'intervalle [x_0,+∞) appelée transformation de Weber-Robin: condition homogène de Robin sur le rayon intérieur

D'après l'article de R.K.M. Thambynayagam et T.M.Habashy, 2003 « A new Weber-Type Transform », un développement intégral existe également sur l'intervalle [x_0,+∞) utilisant les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce. Un autre article de 2009, plus récent de Z.Xinhong.T.Dengke « A generalized Weber transform and its inverse formula » en revendique également la paternité, en se calquant sur la démonstration de l'article original de E.C.Titchmarsh de 1924 « Weber's Integral Theorem », formalise correctement la transformation de Weber-Robin généralisation du problème de Dirichlet et de Neumann, notamment sur les points de discontinuité de la fonction représentait intégralement. Plus tôt l'ouvrage des édition Mir de V.Ditkine.A.Prudnikov, « Transformations intégrales et calcul opérationnel » évoque une transformation de ce type en page 71, avec un renvoie de référence qui s'avère hélas impropre après recherches des articles de J.L.Griffith. La première mention que je trouve de cette transformation est dans l'article de 1932, de S.Goldstein « Some Two-Dimensional Diffusion Problems with Circular Symmetry », en page 87, formule 227.

Les conditions de convergence imposées aux fonctions f(x) sont les mêmes (la variation est bornée sur tout intervalle [x0,x1], et telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{+\infty} dx \left| f(x) \right| \sqrt{x} < \infty$*), pour des fonctions f(x) dont une combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée première s'annule en x=x_0 :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda \; \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0) + h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0) + h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t\, \Psi_\nu(\lambda, t, x_0) f(t)$$

$$\begin{cases} J_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de première espèce} \\ Y_\nu(\lambda x) & \text{fonction de Bessel de deuxième espèce} \end{cases} \quad pour \quad x > x_0 > 0$$

$$\Psi_\nu(\lambda, x, x_0) = J_\nu(\lambda x)\{Y_\nu(\lambda x_0) + h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\} - Y_\nu(\lambda x)\{J_\nu(\lambda x_0) + h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\}$$

$$\Rightarrow \Psi_\nu(\lambda, x_0, x_0) + h\lambda \Psi_\nu'(\lambda, x_0, x_0) = 0$$

$$avec \quad J_\nu'(x) = \left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \quad Y_\nu'(x) = \left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \quad \Psi_\nu'(x) = \left.\frac{\partial \Psi_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t\, \Psi_\nu(\lambda, t, x_0) f(t) \\ f(x) = \int_0^{+\infty} d\lambda \; \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0) + h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0) + h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda, x_0) \end{cases}$$

En cas de discontinuité

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = \int_0^{+\infty} d\lambda \; \frac{\lambda\, \Psi_\nu(\lambda, x, x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0) + h\lambda J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0) + h\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2} F(\lambda, x_0)$$

En posant h=α/β, il vient :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{\lambda\Psi_\nu(\lambda x)}{(\alpha\lambda J_\nu'(\lambda x_0)+\beta J_\nu(\lambda x_0))^2+(\alpha\lambda Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta Y_\nu(\lambda x_0))^2}\int_{x_0}^{+\infty}dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t)$$

$$\alpha f'(x_0)+\beta f(x_0)=0 \qquad \begin{cases} J_\nu(\lambda x) & \textit{fonction de Bessel de première espèce} \\ Y_\nu(\lambda x) & \textit{fonction de Bessel de deuxième espèce} \end{cases}$$

$$\Psi_\nu(\lambda x)=\left(J_\nu(\lambda x)\{\lambda\alpha\, Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x)\{\lambda\alpha\, J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, J_\nu(\lambda x_0)\}\right)$$

$$avec \quad J_\nu'(x)=\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad Y_\nu'(x)=\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad \Psi_\nu'(x)=\left.\frac{\partial \Psi_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

$$\begin{aligned}\alpha\lambda\,\Psi_\nu'(\lambda x_0)+\beta\,\Psi_\nu(\lambda x_0)&=\alpha\lambda\left(J_\nu'(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\, Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu'(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\, J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, J_\nu(\lambda x_0)\}\right)\\ &+\beta\left(J_\nu(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\, Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, Y_\nu(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x_0)\{\lambda\alpha\, J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, J_\nu(\lambda x_0)\}\right)\\ &=\alpha\lambda\beta\left(Y_\nu(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)\right)+\beta\lambda\alpha\left(Y_\nu'(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)-J_\nu'(\lambda x_0)Y_{\nu 0}(\lambda x)\right)\\ &=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} F(\lambda)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda t)f(t) \\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda x)}{(\lambda\alpha\, J_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, J_\nu(\lambda x_0))^2+(\lambda\alpha\, Y_\nu'(\lambda x_0)+\beta\, Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda) \end{cases}$$

Et l'on retrouve les deux transformations intégrales Weber/Dirichlet (α=0, β=1) et Weber/Neumann (α=1, β=0).

Intégrales définies obtenues par la transformée inverse de Weber-Dirichlet

$$\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)=J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) \quad \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty} dt\, t\,\Psi_\nu(\lambda,t,x_0)f(t) \\ f(x)=\int_0^{+\infty} d\lambda\, \dfrac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda) \end{cases}$$

Prenons la fonction puissance : $f(x)=x^{\mu}$. La condition imposée pour la convergence de la transformation intégrale est notamment la finitude de l'intégrale :

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu}\sqrt{t}=\int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+\frac{1}{2}}<\infty \Rightarrow \underset{t->+\infty}{Lim}\, t^{\mu+\frac{3}{2}}=0 \Rightarrow \mu<-\frac{3}{2}$$

Nous allons voir que cette condition est trop restrictive et que la transformation a lieu également pour puissance inférieure à -1/2. Soit donc la transformée de la fonction puissance :

$$f(x)=x^{\mu} \Rightarrow F(\lambda)=\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1}J_\nu(t)-J_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1}Y_\nu(t)\right\}$$

Et utilisons les intégrales indéfinies des fonctions de Bessel en relation soit avec les fonctions de Lommel de première espèce, soit de deuxième espèce :

$$s_{\lambda,\nu}(z) \quad \text{Lommel première espèce} \begin{cases} \int dz\, z^{\lambda}J_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)J_\nu(z)s_{\lambda-1,\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)s_{\lambda,\nu}(z)\right] \\ \int dz\, z^{\lambda}Y_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)Y_\nu(z)s_{\lambda-1,\nu-1}(z)-Y_{\nu-1}(z)s_{\lambda,\nu}(z)\right] \end{cases}$$

$$S_{\lambda,\nu}(z) \quad \text{Lommel deuxième espèce} \begin{cases} \int dz\, z^{\lambda}J_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)J_\nu(z)S_{\lambda-1,\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)S_{\lambda,\nu}(z)\right] \\ \int dz\, z^{\lambda}Y_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)Y_\nu(z)S_{\lambda-1,\nu-1}(z)-Y_{\nu-1}(z)S_{\lambda,\nu}(z)\right] \end{cases}.$$

voir :A. Erdelyi. H. Bateman « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL II », page 90, formule , G.N.Watson « A treatise on the theory of Bessel functions », Cambridge University Press 1944 en page 350, du chapitre 10, section 10.72 « Functions expressible in terms of Lommel's functions », A.P.Prudnikov.Yu.A.Brychkov.O.I.Marichev-Integrals and Series - Volume 2 - Special Functions, section 1.8.1, page 37 formule 3. Les fonctions de Lommel de première espèce ont un comportement asymptotique presque similaire à celui des fonctions de deuxième espèce, à ceci près qu'elles oscille fortement autour de la position asymptotique qui est une fonction puissance du paramètre μ-1. Dans ces conditions il est nettement plus pratique de prendre les fonctions de deuxième espèce dont le comportement asymptotique et plus « régulier ». Ici prenons donc les fonctions de Lommel de deuxième espèce, qui sont en relation avec les polynômes de Neumann, pour des valeurs particulières des paramètres :

$$S_{1,2m}(x)=xO_{2m}(x) \quad avec \quad \begin{cases} O_0(x)=\dfrac{1}{x} \\ O_2(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3} \\ O_4(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^3}+\dfrac{192}{x^5} \end{cases} \qquad S_{0,2m+1}(x)=\frac{x}{2m+1}O_{2m+1}(x) \quad avec \quad \begin{cases} O_1(x)=\dfrac{1}{x^2} \\ O_3(x)=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{24}{x^4} \end{cases}$$

$$S_{-1,2m}(x)=\frac{S_{2m}(x)}{4m} \quad avec \quad \begin{cases} S_0(x)=0 \quad S_2(x)=\dfrac{4}{x^2} \\ S_4(x)=\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{96}{x^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} O_n(x) & \text{polynômes de Neumann} \\ S_n(x) & \text{polynômes de Schläfli} \end{cases}$$

Pour ces valeurs du moins, on observe le comportement asymptotique suivant :
$\forall m \quad m \in \mathbf{N} \quad \underset{x\to\infty}{Lim} S_{1,2m}(x) = 1 \quad , \quad \underset{x\to\infty}{Lim} S_{0,2m+1}(x) = 0 \quad , \quad \underset{x\to\infty}{Lim} S_{-1,2m}(x) = 0$*, ce qui est en accord avec le comportement asymptotique connu des fonctions de Lommel de deuxième espèce (en fonction de puissance) à savoir :*

$$S_{\mu,\nu}(x) \approx x^{\mu-1}\left(1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{x^2} + \frac{\left[(\mu-1)^2 - \nu^2\right]\left[(\mu-3)^2 - \nu^2\right]}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right).$$

Dans ces conditions de paramètres coïncidant avec les polynômes de Neumann, l'intégrale indéfinie s'annule toujours en +∞ pour μ<-1 (et plus précisément μ<-1/2), comme suit :

$$\int_{\lambda x_0}^{\lambda x_1} dt\, t^{\mu+1} J_\nu(t) = \begin{bmatrix} -\lambda x_1 \left\{J_{\nu-1}(\lambda x_1) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) - (\mu+\nu) J_\nu(\lambda x_1) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1)\right\} + \\ \lambda x_0 \left\{J_{\nu-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) J_\nu(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\} \end{bmatrix}$$

$$\int_{\lambda x_0}^{\lambda x_1} dt\, t^{\mu+1} Y_\nu(t) = \begin{bmatrix} -\lambda x_1 \left\{Y_{\nu-1}(\lambda x_1) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) - (\mu+\nu) Y_\nu(\lambda x_1) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1)\right\} + \\ \lambda x_0 \left\{Y_{\nu-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) Y_\nu(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{\lambda x_1} dt\, t^{\mu+1} J_\nu(t) - J_\nu(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{\lambda x_1} dt\, t^{\mu+1} Y_\nu(t) =$$

$$= Y_\nu(\lambda x_0) \begin{bmatrix} -\lambda x_1 \left\{J_{\nu-1}(\lambda x_1) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) - (\mu+\nu) J_\nu(\lambda x_1) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1)\right\} + \\ \lambda x_0 \left\{J_{\nu-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) J_\nu(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\} \end{bmatrix} -$$

$$- J_\nu(\lambda x_0) \begin{bmatrix} -\lambda x_1 \left\{Y_{\nu-1}(\lambda x_1) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) - (\mu+\nu) Y_\nu(\lambda x_1) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1)\right\} + \\ \lambda x_0 \left\{Y_{\nu-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) Y_\nu(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda x_0 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\right\} +$$
$$+ \lambda x_1 (\mu+\nu) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1) \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_1)\right\} +$$
$$- \lambda x_1 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_1)\right\}$$

Comme $\quad S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1) \approx (\lambda x_1)^{\mu-1} \quad S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) \approx (\lambda x_1)^{\mu}$

$$\Rightarrow A(x_1) = \lambda x_1 (\mu+\nu) S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_1) \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_1)\right\} +$$
$$- \lambda x_1 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_1) \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_1)\right\} \approx$$
$$\approx (\lambda x_1)^{\mu+1} \left[-\left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_1)\right\} + \frac{(\mu+\nu)\left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_1) - J_\nu(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_1)\right\}}{\lambda x_1} \right]$$

$$J_\nu(x) \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad Y_\nu(x) \propto x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow A(x_1) \propto x_1^{\mu+\frac{1}{2}}$$

Si $\quad \mu < -\frac{1}{2} \Rightarrow \underset{x_1\to 0}{Lim} A(x_1) = 0 \Rightarrow F(\lambda) = \frac{x_0 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \left\{Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\right\}$

En calculant l'expression sur Mathematica par les substitutions adéquates, on parvient à l'expression asymptotique suivante de A(x1) qui confirme la validité d'utilisation des intégrales définie :

$$A(x_1) \approx \begin{Bmatrix} \mu(\lambda x_1)^{\mu}\{J_\nu(\lambda x_1)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_\nu(\lambda x_1)J_\nu(\lambda x_0)\} + \\ +(\lambda x_1)^{\mu+1}\left\{Y_\nu(\lambda x_0)\left.\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=\lambda x_1} - J_\nu(\lambda x_0)\left.\frac{\partial Y_\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=\lambda x_1}\right\}\end{Bmatrix}$$

$$J_\nu(x) \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad Y_\nu(x) \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad \left.\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=\lambda x_1} \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad \left.\frac{\partial Y_\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=\lambda x_1} \propto x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow A(x_1) \propto x_1^{\mu+\frac{1}{2}} \Rightarrow \underset{x_1\to+\infty}{Lim} A(x_1) = 0 \quad pour \quad \mu < -\frac{1}{2}$$

Il vient donc :

$$Si \quad \mu < -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_\nu(t) = \lambda x_0 \{J_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) J_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\}$$

$$Si \quad \mu < -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_\nu(t) = \lambda x_0 \{Y_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) - (\mu+\nu) Y_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = \frac{x_0 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\}$$

Prenons maintenant les formules qui relient les fonctions de Bessel à leur dérivée, ainsi que la valeur du Wronskien des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, il vient :

$$\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x} = \lambda\left(J_{\nu-1}(\lambda x) - \frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\right) \quad \frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x} = \lambda\left(Y_{\nu-1}(\lambda x) - \frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)\right)$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0) = Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x} - J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}$$

$$Et \quad J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x} - Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x} = \frac{2\lambda}{\pi\lambda x_0} = \frac{2}{x_0\pi}$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = \frac{x_0 S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x} - J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}\right\} = -\frac{2S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\pi\lambda^{\mu+2}}$$

Formule de la transformée de Weber-Dirichlet de la fonction puissance :

$$F(\lambda) = \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1}\,(Y_\nu(\lambda t)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda t)Y_\nu(\lambda x_0)) = \frac{2S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\pi\lambda^{\mu+2}} \quad \forall\mu < -\frac{1}{2}$$

Il vient par exemple pour μ=-1 , ν=1:

$$S_{0,1}(\lambda x_0) = \frac{1}{\lambda x_0} \Rightarrow F(\lambda) = \int_{x_0}^{+\infty} dt\,(Y_1(\lambda t)J_1(\lambda x_0) - J_1(\lambda t)Y_1(\lambda x_0)) = \frac{2}{\pi\lambda^2 x_0}$$

Et pour μ=-2 , ν=2 : $S_{-1,2}(\lambda x_0) = \frac{1}{\lambda^2 x_0^{\,2}} \Rightarrow F(\lambda) = \int_{x_0}^{+\infty} dt\, \frac{Y_2(\lambda t)J_2(\lambda x_0) - J_2(\lambda t)Y_2(\lambda x_0)}{t} = \frac{2}{\pi\,\lambda^2 x_0^{\,2}}$

La transformée inverse de Weber-Dirichlet donne donc l'intégrale définie suivante :

$$\forall\mu < -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, \frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\,\frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\begin{cases} x^\mu & si \quad x > x_0 \\ 0 & si \quad x \le x_0\end{cases}$$

Cela donne par exemple dans le cas particulier où μ=-2 et μ=-1:

$$x > x_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2} x^\mu$$

$$\mu = -2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda S_{-1,\nu}(\lambda x_0) \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2x^2}$$

$$\nu = 2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_2(\lambda x)J_2(\lambda x_0) - J_2(\lambda x)Y_2(\lambda x_0)}{(J_2(\lambda x_0))^2 + (Y_2(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^2$$

$$\mu = -1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, S_{0,\nu}(\lambda x_0) \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2x}$$

$$\nu = 1 \Rightarrow S_{0,1}(\lambda x_0) = \frac{1}{\lambda x_0} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_1(\lambda x)J_1(\lambda x_0) - J_1(\lambda x)Y_1(\lambda x_0)}{(J_1(\lambda x_0))^2 + (Y_1(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\frac{x_0}{x} \quad pour \quad x > x_0$$

$$Cas \quad \nu = 1, \nu = 2 \Leftarrow Prudnikov.vol.2.formule.2.3.17.1.page.275$$

$$\forall \nu \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu$$

Il se trouve que la formule obtenue marche également pour le cas μ=0 (même si ce ne sont pas les conditions formelles d'application de l'intégrale indéfinie).

$$x > x_0 \quad \mu = 0 \quad \nu = 0 \Rightarrow S_{1,0}(\lambda x_0) = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} \frac{Y_0(\lambda x)J_0(\lambda x_0) - J_0(\lambda x)Y_0(\lambda x_0)}{(J_0(\lambda x_0))^2 + (Y_0(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$Cas \quad \nu = 0 \Leftarrow Prudnikov.vol.2.formule.2.3.17.1.page.275$$

$$\forall \nu \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu$$

Au passage l'intégrale de Prudnikov représente une transformée inverse de Weber-Dirichlet et nous obtenons l'intégrale définie suivante en inversant la transformation :

$$\forall \nu, x > x_0 \quad \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\lambda^2} \frac{Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu (Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)) = \frac{2}{\pi\lambda^2} \Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{1-\nu}(Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)) = \frac{2}{\pi\lambda^2 {x_0}^\nu}$$

En réalité cette intégrale est facile à calculer à l'aide d'intégrales indéfinies très connues, il vient :

$$\int dx\, x^{1-\nu} J_\nu(x) = -x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) \quad \int dx\, x^{1-\nu} Y_\nu(x) = -x^{1-\nu} Y_{\nu-1}(x)$$

$$x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) \propto x^{\frac{1}{2}-\nu} \Rightarrow Pour\ \nu > \frac{1}{2} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) = 0$$

$$\int dx\, x^{1-\nu} J_\nu(\lambda x) = -\frac{x^{1-\nu} J_{\nu-1}(\lambda x)}{\lambda} \quad \int dx\, x^{1-\nu} Y_\nu(x) = -\frac{x^{1-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{1-\nu}(Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)) = \frac{{x_0}^{1-\nu}}{\lambda}(J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0) - Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0))$$

$$= \frac{{x_0}^{1-\nu}}{\lambda^2}\left(J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x} - Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}\right) = \frac{2{x_0}^{1-\nu}}{\pi\lambda^2 x_0} = \frac{2}{\pi\lambda^2 {x_0}^\nu}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{1-\nu}(Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)) = \frac{2}{\pi\lambda^2 {x_0}^\nu}$$

Comme on a démontré facilement la valeur de l'intégrale définie précédente, en appliquant la transformée inverse de Weber-Dirichlet, on démontre la formule de Prudnikov :

$$\forall \nu > \frac{1}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu .$$

Pour toutes les valeurs de paramètre où sont établies les correspondances avec les polynômes de Neumann , il vient pour μ=-2 :

$$S_{1,2m}(\lambda x_0) = \lambda x_0 O_{2m}(\lambda x_0) \quad S_{0,2m+1}(\lambda x_0) = \frac{\lambda x_0 O_{2m+1}(\lambda x_0)}{2m+1}$$

$$x > x_0 \quad \mu = -2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda \frac{S_{2m}(x)}{4m} \frac{Y_{2m}(\lambda x) J_{2m}(\lambda x_0) - J_{2m}(\lambda x) Y_{2m}(\lambda x_0)}{(J_{2m}(\lambda x_0))^2 + (Y_{2m}(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2x^2}$$

$$\nu = 4 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda}\left(1 + \frac{12}{\lambda^2 x_0{}^2}\right) \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 .$$

$$\text{Sachant que} \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^4$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{24} x_0{}^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)$$

Et pour les deux cas incluant μ=-1 μ=0 :

$$S_{1,2m}(\lambda x_0) = \lambda x_0 O_{2m}(\lambda x_0) \quad S_{0,2m+1}(\lambda x_0) = \frac{\lambda x_0 O_{2m+1}(\lambda x_0)}{2m+1}$$

$$x > x_0 \quad \mu = -1 \quad \nu = 2m+1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda O_{2m+1}(\lambda x_0) \frac{Y_{2m+1}(\lambda x) J_{2m+1}(\lambda x_0) - J_{2m+1}(\lambda x) Y_{2m+1}(\lambda x_0)}{(J_{2m+1}(\lambda x_0))^2 + (Y_{2m+1}(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi(2m+1)}{2 x x_0}$$

$$\nu = 3 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda}\left(1 + \frac{8}{\lambda^2 x_0^{\,2}}\right) \frac{Y_3(\lambda x) J_3(\lambda x_0) - J_3(\lambda x) Y_3(\lambda x_0)}{(J_3(\lambda x_0))^2 + (Y_3(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\frac{x_0}{x}$$

$$Comme \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_3(\lambda x) J_3(\lambda x_0) - J_3(\lambda x) Y_3(\lambda x_0)}{(J_3(\lambda x_0))^2 + (Y_3(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^3$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{Y_3(\lambda x) J_3(\lambda x_0) - J_3(\lambda x) Y_3(\lambda x_0)}{(J_3(\lambda x_0))^2 + (Y_3(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{16}\frac{x_0^{\,3}}{x}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)$$

$$x > x_0 \quad \mu = 0 \quad \nu = 2m \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, O_{2m}(\lambda x_0) \frac{Y_{2m}(\lambda x) J_{2m}(\lambda x_0) - J_{2m}(\lambda x) Y_{2m}(\lambda x_0)}{(J_{2m}(\lambda x_0))^2 + (Y_{2m}(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2 x_0}$$

$$\nu = 2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda}\left(1 + \frac{4}{\lambda^2 x_0^{\,2}}\right) \frac{Y_2(\lambda x) J_2(\lambda x_0) - J_2(\lambda x) Y_2(\lambda x_0)}{(J_2(\lambda x_0))^2 + (Y_2(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$Or \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_2(\lambda x) J_2(\lambda x_0) - J_2(\lambda x) Y_2(\lambda x_0)}{(J_2(\lambda x_0))^2 + (Y_2(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{Y_2(\lambda x) J_2(\lambda x_0) - J_2(\lambda x) Y_2(\lambda x_0)}{(J_2(\lambda x_0))^2 + (Y_2(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{8} x_0^{\,2}\left(1 - \frac{x_0^{\,2}}{x^2}\right)$$

$$\nu = 4 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda}\left(1 + \frac{16}{\lambda^2 x_0^{\,2}} + \frac{192}{\lambda^4 x_0^{\,4}}\right) \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$Or \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^4$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1 + \frac{12}{\lambda^2 x_0^{\,2}}\right) \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{32} x_0^{\,2}\left(1 - \frac{x_0^{\,4}}{x^4}\right)$$

$$Et\ comme \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{24} x_0^{\,2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5} \frac{Y_4(\lambda x) J_4(\lambda x_0) - J_4(\lambda x) Y_4(\lambda x_0)}{(J_4(\lambda x_0))^2 + (Y_4(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{384} x_0^{\,4}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)$$

Intégrales définies obtenues par la transformée inverse de Weber-Neumann

$$\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)=J_\nu(\lambda x)Y_\nu{}'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu{}'(\lambda x_0)\Leftrightarrow\begin{cases}F(\lambda,x_0)=\int\limits_{x_0}^{+\infty}dt\ t\,\Psi_\nu(\lambda,t,x_0)f(t)\\ f(x)=\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\ \dfrac{\lambda\,\Psi_\nu(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu{}'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu{}'(\lambda x_0))^2}F(\lambda)\end{cases}$$

Prenons également la fonction puissance : f(x)=x^µ. La condition imposée pour la convergence de la transformation intégrale est notamment la finitude de l'intégrale :

$$\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu}\sqrt{t}=\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+\frac{1}{2}}<\infty\Rightarrow\underset{t->+\infty}{Lim}\,t^{\mu+\frac{3}{2}}=0\Rightarrow\mu<-\frac{3}{2}$$

Nous allons voir que cette condition est trop restrictive et que la transformation a lieu également pour puissance inférieure à -1/2.

$$f(x)=x^{\mu}\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu{}'(\lambda x_0)\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}J_\nu(t)-J_\nu{}'(\lambda x_0)\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}Y_\nu(t)\right\}.$$

En utilisant les intégrales indéfinies des fonctions de Bessel en relation avec les fonctions de Lommel de deuxième espèce et dans les mêmes conditions d'application de la formule de l'intégrale indéfinie (soit µ <-1/2) , il vient :

$$\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}J_\nu(t)=\lambda x_0\left(J_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-(\mu+\nu)J_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right)$$

$$\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}Y_\nu(t)=\lambda x_0\left(Y_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-(\mu+\nu)Y_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right)$$

$$\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(J_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\right)\quad\frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(Y_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)\right)$$

$$Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}-J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}=-\frac{2\lambda}{\pi\lambda x_0}=-\frac{2}{x_0\pi}$$

$$F(\lambda,x_0)=\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu{}'(\lambda x_0)\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}J_\nu(t)-J_\nu{}'(\lambda x_0)\int\limits_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\ t^{\mu+1}Y_\nu(t)\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{\lambda}{\lambda^{\mu+2}}\left\{\begin{array}{l}\lambda x_0\left(Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}Y_\nu(\lambda x_0)\right)\left\{J_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-(\mu+\nu)J_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\}-\\ -\lambda x_0\left(J_{\nu-1}(\lambda x_0)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}J_\nu(\lambda x_0)\right)\left\{Y_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-(\mu+\nu)Y_\nu(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{1}{\lambda^{\mu+1}}\left\{\begin{array}{l}\nu S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)\{J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)\}+\\ +\lambda x_0(\mu+\nu)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{(\mu+\nu)\lambda x_0S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)-\nu S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{(\mu+\nu)\lambda x_0S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)-\nu S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+2}}\{Y_\nu(\lambda x_0)J_\nu{}'(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_\nu{}'(\lambda x_0)\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{2}{x_0\pi}\frac{\nu S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-(\mu+\nu)\lambda x_0S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+2}}$$

Toujours dans G.N.Watson « A treatise on the theory of Bessel functions », Cambridge University Press 1944 en page 350, du chapitre 10, section 10.72 « Functions expressible in terms of Lommel's functions », il est donné les formules des dérivées des fonctions de Lommel de deuxième espèce :

$$\frac{\partial S_{\mu,\nu}(x)}{\partial x}=-\frac{\nu}{x}S_{\mu,\nu}(x)+(\mu+\nu-1)S_{\mu-1,\nu-1}(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(x)}{\partial x}=-\frac{\nu}{x}S_{\mu+1,\nu}(x)+(\mu+\nu)S_{\mu,\nu-1}(x)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(\lambda x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}\left(-\nu\, S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)+\lambda x_0(\mu+\nu)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right).$$

$$\Rightarrow \nu\, S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)-\lambda x_0(\mu+\nu)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)=-x_0\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(\lambda x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\qquad \left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(\lambda x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\lambda\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}$$

D'où le résultat assez court suivant : $F(\lambda)=-\dfrac{2}{\pi\lambda^{\mu+1}}\left.\dfrac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}$.

Formule de la transformée de Weber-Neumann de la fonction puissance :

$$F(\lambda)=\int_{x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+1}\left(J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)\right)=-\frac{2}{\pi\lambda^{\mu+1}}\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}.$$

La transformée inverse de Weber-Neumann donne donc :

$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{1}{\lambda^{\mu}}\left(\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)\frac{\left(Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)\right)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}=\begin{cases}x^\mu & si\quad x\ge x_0\\ 0 & si\quad x<x_0\end{cases}.$$

Ou encore plus exactement avant de passer à une limite donnée :

$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{1}{\lambda^{\mu+1}}\left(\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)\frac{\left\{Y_\nu(\lambda x)\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)-J_\nu(\lambda x)\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)\right\}}{\left\{\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2\right\}}=\begin{cases}x^\mu & si\quad x\ge x_0\\ 0 & si\quad x<x_0\end{cases}$$

Si maintenant on pose x=x0, puis x0=1, il vient :

$$Comme\quad Y_\nu(\lambda x_0)\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)-J_\nu(\lambda x_0)\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)=-\frac{2}{\pi\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow-\frac{4}{\pi^2x_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\frac{\left(\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)}{\left\{\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2\right\}}=1.$$

$$x_0\to1\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\frac{\left(\left.\frac{\partial S_{\mu+1,\nu}(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda}\right)}{\left\{\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda}\right)^2\right\}}=-\frac{\pi^2}{4}$$

Soit donc l'intégrale indéfinie logiquement valable pour les valeurs μ<-1/2 :

$$\mu < -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \, \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \frac{S_{\mu+1,\nu}'(\lambda)}{\left\{(J_\nu'(\lambda))^2 + (Y_\nu'(\lambda))^2\right\}} = -\frac{\pi^2}{4} \cdot$$

Pour des valeurs particulières des paramètres, les fonctions de Lommel sont associées aux polynômes de Neumann :

$$S_{1,2m}(x) = xO_{2m}(x) \quad avec \quad \begin{cases} O_0(x) = \dfrac{1}{x} \\ O_2(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^3} \\ O_4(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{16}{x^3} + \dfrac{192}{x^5} \end{cases} \qquad S_{0,2m+1}(x) = \frac{x}{2m+1} O_{2m+1}(x) \quad avec \quad \begin{cases} O_1(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ O_3(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{24}{x^4} \end{cases}$$

$$S_{-1,2m}(x) = \frac{S_{2m}(x)}{4m} \quad avec \quad \begin{cases} S_0(x) = 0 \quad S_2(x) = \dfrac{4}{x^2} \\ S_4(x) = \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{96}{x^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} O_n(x) & polynômes\ de\ Neumann \\ S_n(x) & polynômes\ de\ Schläfli \end{cases}$$

Dans ce qui suit on utilise la formule suivante, donnée d'abord sans démonstration

$$: \int_0^{+\infty} d\lambda \, \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{\left\{(J_\nu'(\lambda))^2 + (Y_\nu'(\lambda))^2\right\}} = \frac{\pi^2}{4\nu} \cdot$$

Il vient les diverses intégrales définies dont on remarque qu'elles s'appliquent également au cas μ=0 :

$$\mu=-2 \quad \nu=2 \Rightarrow S_{-1,2}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow S_{-1,2}'(\lambda)=-\frac{2}{\lambda^3} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{\left\{(J_2'(\lambda))^2+(Y_2'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\mu=-2 \quad \nu=4 \Rightarrow S_{-1,2}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{12}{\lambda^4} \Rightarrow S_{-1,4}'(\lambda)=-\frac{2}{\lambda^3}-\frac{48}{\lambda^5}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1+\frac{24}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{8} \Leftarrow \int_0^{+\infty}d\lambda\frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{16}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{384}$$

$$\mu=-1 \quad \nu=1 \Rightarrow S_{0,1}(\lambda)=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow S_{0,1}'(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{\left\{(J_1'(\lambda))^2+(Y_1'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{4}$$

$$\mu=0 \quad \nu=2 \Rightarrow S_{1,2}(\lambda)=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{4}{\lambda^3}\right) \Rightarrow S_{1,2}'(\lambda)=-\frac{8}{\lambda^3} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{\left\{(J_2'(\lambda))^2+(Y_2'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{32}.$$

$$\mu=-1 \quad \nu=3 \Rightarrow S_{0,3}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+\frac{8}{\lambda^3} \Rightarrow S_{0,3}'(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2}-\frac{24}{\lambda^4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1+\frac{24}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\left\{(J_3'(\lambda))^2+(Y_3'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{4} \Leftarrow \int_0^{+\infty}d\lambda\frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\left\{(J_3'(\lambda))^2+(Y_3'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{\left\{(J_3'(\lambda))^2+(Y_3'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{144}$$

$$\mu=0 \quad \nu=4 \Rightarrow S_{1,4}(\lambda)=1+\frac{16}{\lambda^2}+\frac{192}{\lambda^4} \Rightarrow S_{1,4}'(\lambda)=-32\left(\frac{1}{\lambda^3}+\frac{24}{\lambda^5}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\left(1+\frac{24}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{128} \Leftarrow \int_0^{+\infty}d\lambda\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{384}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{\left\{(J_4'(\lambda))^2+(Y_4'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{4608}$$

Pour toutes les valeurs de paramètre où sont établies les correspondances avec les polynômes de Neumann, il vient :

$$S_{1,2m}'(\lambda)=O_{2m}(\lambda)+\lambda O_{2m}'(\lambda) \quad S_{0,2m+1}'(\lambda)=\frac{O_{2m+1}(\lambda)+\lambda O_{2m+1}'(\lambda)}{2m+1}$$

$$\text{Comme} \quad \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \frac{S_{\mu+1,\nu}'(\lambda)}{\left\{(J_\nu'(\lambda))^2+(Y_\nu'(\lambda))^2\right\}}=-\frac{\pi^2}{4}$$

$$\mu=-2 \quad \nu=2m \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \frac{S_{2m}'(\lambda)}{\left\{(J_\nu'(\lambda))^2+(Y_\nu'(\lambda))^2\right\}}=-m\pi^2 \quad .$$

$$\mu=-1 \quad \nu=2m+1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} \frac{O_{2m+1}(\lambda)+\lambda O_{2m+1}'(\lambda)}{J_{2m+1}'(\lambda)^2+Y_{2m+1}'(\lambda)^2}=-\frac{2m+1}{4}\pi^2$$

$$\mu=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda^2} \frac{O_{2m}(\lambda)+\lambda O_{2m}'(\lambda)}{J_{2m}'(\lambda)^2+Y_{2m}'(\lambda)^2}=-\frac{\pi^2}{4}$$

Dans ce qui précède on a utilisé la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{\left\{(J_\nu'(\lambda))^2+(Y_\nu'(\lambda))^2\right\}}=\frac{\pi^2}{4\nu}$$

Étudions maintenant la transformée de Weber-Neumann de la fonction puissance négative $x^{-\nu}$:

$$\int dx\, x^{1-\nu} J_\nu(x)=-x^{1-\nu}J_{\nu-1}(x) \quad \int dx\, x^{1-\nu} Y_\nu(x)=-x^{1-\nu}Y_{\nu-1}(x)$$

$$x^{1-\nu}J_{\nu-1}(x)\propto x^{\frac{1}{2}-\nu} \Rightarrow Pour\ \nu>\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1-\nu}J_{\nu-1}(x)=0$$

$$\int dx\, x^{1-\nu} J_\nu(\lambda x)=-\frac{x^{1-\nu}J_{\nu-1}(\lambda x)}{\lambda} \quad \int dx\, x^{1-\nu} Y_\nu(x)=-\frac{x^{1-\nu}Y_{\nu-1}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$J_{\nu-1}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}+\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x) \quad Y_{\nu-1}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}+\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x) \quad .$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{1-\nu}\left(Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)\right)=\frac{x_0^{1-\nu}}{\lambda}\left(J_\nu'(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_\nu'(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)\right)$$

$$=\frac{x_0^{1-\nu}}{\lambda}\frac{\nu}{\lambda x_0}\left(J_\nu'(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu'(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)\right)=-\frac{x_0^{1-\nu}}{\lambda}\frac{\nu}{\lambda x_0}\frac{2}{\pi x_0}=-\frac{2\nu}{\pi\lambda^2 x_0^{1+\nu}}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, \frac{x}{x^\nu}\left(J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)\right)=\frac{2\nu}{\pi\lambda^2 x_0^{1+\nu}}$$

Il vient alors par la transformée inverse, l'intégrale définie suivante :

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\left(J_\nu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)\right)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi x_0^{1+\nu}}{2\nu x^\nu}$$

$$\text{Comme} \quad J_\nu(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)=\frac{2}{\pi x_0} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{1}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi^2 x_0^2}{4\nu} \quad .$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{1}{\left(\left.\frac{\partial J_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial Y_\nu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x_0}\right)^2}=\frac{\pi^2 x_0^2}{4\nu} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{1}{(J_\nu'(\lambda))^2+(Y_\nu'(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{4\nu}$$

On a donc démontré la formule utilisée pour établir les diverses intégrales indéfinies.

Transformation généralisée de Weber-Orr vers l'arrière

D'après l'article de C.Nasim de 1989, « Associated weber integral transforms of arbitrary orders », une transformation intégrale généralisée de Weber-Orr est possible, et construite selon la formule suivante :

$$\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_\mu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\mu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\quad \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\dfrac{\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)\end{cases}$$

Plus précisément l'article étudie la transformation intégrale avec le noyau suivant construit à partir du paramètre μ=ν-α :

$$\Psi_{\nu-\alpha,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-\alpha}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-\alpha}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\quad \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu-\alpha,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\dfrac{\Psi_{\nu-\alpha,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)\end{cases}$$

L'inversion y est prouvée lorsque les paramètres sont définies tel que μ=ν-α , avec :

$$0\le\alpha<\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\quad si\quad \alpha\in\mathbf{N}\Rightarrow 0<\alpha<\left\lceil\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right\rceil$$

$$\begin{cases}\nu=1\quad \left\lceil\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right\rceil=2\Rightarrow 0\le\alpha<2\Rightarrow\alpha=0{,}1 \\ \nu=2\quad \left\lceil\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right\rceil=2\Rightarrow 0\le\alpha<2\Rightarrow\alpha=0{,}1 \\ \nu=3\quad \left\lceil\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right\rceil=3\Rightarrow 0\le\alpha<3\Rightarrow\alpha=0{,}1{,}2 \\ \dots\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=1\Rightarrow\nu>\frac{1}{2} \\ \alpha=2\Rightarrow\nu>\frac{5}{2} \\ \alpha=3\Rightarrow\nu>\frac{9}{2}\end{cases}$$

Transformation généralisée de Weber-Orr (cas μ=ν-1)

$$\Psi_{\nu-1,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\left(J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\dfrac{J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)\end{cases}$$

Autre formulation

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}=J_\nu'(\lambda x)=J_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}=Y_\nu'(\lambda x)=Y_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)$$

En notant $J_\nu'(\lambda x)=\left.\dfrac{\partial J_\mu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x}\quad J_\nu'(\lambda x)=\left.\dfrac{\partial J_\mu(y)}{\partial y}\right|_{y=\lambda x}$

$$\Rightarrow\Psi_{\nu-1,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_\nu'(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$

Notons que $\Psi_{\nu-1,\nu}(\lambda,x_0,x_0)=J_\nu'(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu'(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}$ *Wronskien*

De plus :

$$\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(J_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\right)\quad \frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(Y_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)\right)$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)=-\frac{2}{x_0\pi\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(Y_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial J_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}-J_\nu(\lambda x_0)\frac{\partial Y_\nu(\lambda x_0)}{\partial x}\right).$$

$$\textit{De plus}\quad J_{\nu-2}(\lambda x)=\frac{2(\nu-1)}{\lambda x}J_{\nu-1}(\lambda x)-J_\nu(\lambda x)\quad Y_{\nu-2}(\lambda x)=\frac{2(\nu-1)}{\lambda x}Y_{\nu-1}(\lambda x)-Y_\nu(\lambda x)$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)=\frac{2(\nu-1)}{\lambda x_0}\left(Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\right)$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)=-\frac{4(\nu-1)}{\pi\lambda^2 x_0{}^2}$$

Rappelons les intégrales indéfinies suivantes :

$$S_{\lambda,\nu}(z)\quad \textit{Lommel deuxième espèce}\quad \begin{cases}\int dz\, z^\lambda J_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)J_\nu(z)S_{\lambda-1,\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)S_{\lambda,\nu}(z)\right]\\ \int dz\, z^\lambda Y_\nu(z)=z\left[(\lambda+\nu-1)Y_\nu(z)S_{\lambda-1,\nu-1}(z)-Y_{\nu-1}(z)S_{\lambda,\nu}(z)\right]\end{cases}$$

Calculons la transformée intégrale de la fonction puissance x^μ*:*

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\, t^{\mu+1}J_{\nu-1}(t)=\lambda x_0\left(J_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-1)J_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)\right)$$

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\, t^{\mu+1}Y_{\nu-1}(t)=\lambda x_0\left(Y_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-1)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)\right)$$

$$F(\lambda,x_0)=\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\, t^{\mu+1}J_{\nu-1}(t)-J_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\, t^{\mu+1}Y_{\nu-1}(t)\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}}\begin{Bmatrix}Y_\nu(\lambda x_0)\{J_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-1)J_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)\}-\\ -J_\nu(\lambda x_0)\{Y_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-1)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)\}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{x_0}{\lambda^{\mu+1}}\begin{Bmatrix}S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)\}+\\ -(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{2}{\lambda^{\mu+1}\pi}\left\{-\frac{2(\nu-1)}{\lambda^2 x_0}S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)+\frac{(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)}{\lambda}\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{2}{\lambda^{\mu+3}\pi\, x_0}\left\{\lambda x_0(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)-2(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{\mu+1}\left(J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{2\{\lambda x_0(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(\lambda x_0)-2(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(\lambda x_0)\}}{\lambda^{\mu+3}\pi\, x_0}$$

D'après l'ouvrage de Watson sur les fonctions de Bessel et relatives aux fonctions de Bessel, nous avons :

$$x\frac{\partial S_{\mu,\nu}(x)}{\partial x}=x(\mu+\nu-1)S_{\mu-1,\nu-1}(x)-\nu\, S_{\mu,\nu}(x)\Rightarrow x\frac{\partial S_{\mu+1,\nu-1}(x)}{\partial x}=x(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(x)-(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(x)$$

$$\Rightarrow x(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(x)-2(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(x)=x\frac{\partial S_{\mu+1,\nu-1}(x)}{\partial x}-(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(x)$$

$$Comme\quad x\frac{\partial S_{\mu,\nu}(x)}{\partial x}-\nu\, S_{\mu,\nu}(x)=x(\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(x)$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial S_{\mu+1,\nu-1}(x)}{\partial x}-(\nu-1)\, S_{\mu+1,\nu-1}(x)=x(\mu-\nu+1)S_{\mu,\nu}(x)$$

$$\Rightarrow x(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(x)-2(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(x)=x(\mu-\nu+1)S_{\mu,\nu}(x)$$

On arrive encore une fois à un résultat fort simple :

$$F(\lambda,x_0)=\frac{2(\mu-\nu+1)}{\lambda^{\mu+2}\pi}S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)$$

$$F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{\mu+1}\left(J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{2(\mu+1-\nu)}{\pi\,\lambda^{\mu+2}}S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)$$

$$\Rightarrow x>x_0\quad \int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\frac{J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2}\frac{x^\mu}{\mu+1-\nu}$$

Prenons maintenant la valeur $x=x_0$, il vient :

$$J_{\nu-1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\frac{2}{x_0\pi\lambda}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+2}}\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{x_0^{\mu+1}}{\mu+1-\nu}.$$

Au vue de l'intégrale la valeur de x0 est non essentielle, et l'on peut prendre la valeur x0=1 :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+2}}\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\mu+1-\nu}\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+3}}\frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\mu+2-\nu}$$

$$\mu=-1\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{S_{-1,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{4\nu}\qquad\mu=0\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\frac{S_{0,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{4(\nu-1)}$$

Si l'on se donne comme paramètre ceux pour lesquels les fonctions de Lommel de deuxième espèce coïncident avec des polynômes de Neumann ou de Shläfli :

$$S_{1,2m}(x)=xO_{2m}(x)\quad avec\quad\begin{cases}O_0(x)=\frac{1}{x}\\ O_2(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\\ O_4(x)=\frac{1}{x}+\frac{16}{x^3}+\frac{192}{x^5}\end{cases}\qquad S_{0,2m+1}(x)=\frac{x}{2m+1}O_{2m+1}(x)\quad avec\quad\begin{cases}O_1(x)=\frac{1}{x^2}\\ O_3(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{24}{x^4}\end{cases}$$

$$S_{-1,2m}(x)=\frac{S_{2m}(x)}{4m}\quad avec\quad\begin{cases}S_0(x)=0\quad S_2(x)=\frac{4}{x^2}\\ S_4(x)=\frac{8}{x^2}+\frac{96}{x^4}\end{cases}\quad\begin{cases}O_n(x)\quad \text{polynômes de Neumann}\\ S_n(x)\quad \text{polynômes de Schläfli}\end{cases}$$

.

Alors on peut écrire :

$$\mu=-1 \quad \nu=2 \quad S_{-1,2}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_2(\lambda))^2+(Y_2(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\mu=-1 \quad \nu=4 \quad S_{-1,4}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{12}{\lambda^2}\right)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1+\frac{12}{\lambda^2}\right)\frac{1}{(J_4(\lambda))^2+(Y_4(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{16}$$

$$\mu=0 \quad \nu=3 \quad S_{0,3}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{8}{\lambda^2}\right)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1+\frac{8}{\lambda^2}\right)\frac{1}{(J_3(\lambda))^2+(Y_3(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$Comme \quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_3(\lambda))^2+(Y_3(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{(J_3(\lambda))^2+(Y_3(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{128}$$

Plus généralement on constate que : $\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8(\nu-1)}$.

Pour démontrer le résultat de cette intégrale définie, calculons la transformée de Weber-Orr d'une fonction puissance $x^{1-\nu}$:

$$\int dx\, x^{2-\nu}J_{\nu-1}(x)=-x^{2-\nu}J_{\nu-2}(x) \quad \int dx\, x^{2-\nu}Y_{\nu-1}(x)=-x^{2-\nu}Y_{\nu-2}(x)$$

$$x^{2-\nu}J_{\nu-2}(x)\propto x^{\frac{3}{2}-\nu}\Rightarrow Pour\ \nu>\frac{3}{2} \quad \lim_{x\to+\infty}x^{2-\nu}J_{\nu-2}(x)=0$$

$$\int dx\, x^{2-\nu}J_{\nu-1}(\lambda x)=-\frac{x^{2-\nu}J_{\nu-2}(\lambda x)}{\lambda} \quad \int dx\, x^{2-\nu}Y_{\nu-1}(x)=-\frac{x^{2-\nu}Y_{\nu-2}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{2-\nu}\left(J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{{x_0}^{2-\nu}}{\lambda}\left(J_{\nu-2}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)\right)$$

$$Comme \quad Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)=-\frac{4(\nu-1)}{\pi\lambda^2{x_0}^2}$$

$$\Rightarrow\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{2-\nu}\left(J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=-\frac{4(\nu-1)}{\pi\lambda^3{x_0}^\nu}$$

Comme on a démontré facilement la valeur de l'intégrale définie précédente, en appliquant la transformée inverse de Weber-Dirichlet, on démontre la formule suivante :

$$\forall\nu>\frac{3}{2} \quad x>x_0 \quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\frac{J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{4}\frac{x^{1-\nu}{x_0}^\nu}{(\nu-1)}.$$

Cela donne pour x=x0 et x0=1 :

$$\forall\nu>\frac{3}{2} \quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi^2}{8}\frac{{x_0}^2}{(\nu-1)}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8(\nu-1)}$$

Transformation généralisée de Weber-Orr vers l'arrière (cas μ=ν-2)

$$\begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\left(J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\dfrac{J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0) \end{cases}$$

On a besoin de quelques formules, comme suit :

$$\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(J_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\right)\quad \frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(Y_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)\right)$$

$$J_{\nu-3}(\lambda x)=\frac{2(\nu-2)}{\lambda x}J_{\nu-2}(\lambda x)-J_{\nu-1}(\lambda x)\quad Y_{\nu-3}(\lambda x)=\frac{2(\nu-2)}{\lambda x}Y_{\nu-2}(\lambda x)-Y_{\nu-1}(\lambda x)$$

$$\Rightarrow Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-3}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-3}(\lambda x_0)=$$

$$\frac{2(\nu-2)}{\lambda x_0}\left(Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)\right)-\left(Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0} \\ Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)=-\dfrac{4(\nu-1)}{\pi\lambda^2 x_0{}^2} \\ Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-3}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-3}(\lambda x_0)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}\left(1-\dfrac{4(\nu-1)(\nu-2)}{\lambda^2 x_0{}^2}\right) \end{cases}$$

Transformée de Weber-Orr généralisée vers l'arrière (cas μ=ν-2) de la fonction puissance x^μ :

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+1}J_{\nu-2}(t)=\lambda x_0\left(J_{\nu-3}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-2)J_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\right)$$

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+1}Y_{\nu-2}(t)=\lambda x_0\left(Y_{\nu-3}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-2)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\right)$$

$$F(\lambda,x_0)=\frac{1}{\lambda^{\mu+2}}\left\{Y_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+1}J_{\nu-2}(t)-J_\nu(\lambda x_0)\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+1}Y_{\nu-2}(t)\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}}\begin{Bmatrix} Y_\nu(\lambda x_0)\{J_{\nu-3}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-2)J_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\}- \\ -J_\nu(\lambda x_0)\{Y_{\nu-3}(\lambda x_0)S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)-(\mu+\nu-2)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{x_0}{\lambda^{\mu+1}}\begin{Bmatrix} S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-3}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-3}(\lambda x_0)\}+ \\ -(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\{Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{2}{\pi\lambda^{\mu+4}x_0{}^2}\left\{\left(\lambda^2x_0{}^2-4(\nu-1)(\nu-2)\right)S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0)+2\lambda x_0(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(\lambda x_0)\right\}$$

D'après l'ouvrage de Watson sur les fonctions de Bessel et relatives aux fonctions de Bessel, nous avons :

$$(1)\quad 2\nu\, S_{\mu,\nu}(x) = x(\mu+\nu-1)S_{\mu-1,\nu-1}(x) - x(\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(x)$$

$$(2)\quad S_{\mu+2,\nu}(x) = x^{\mu+1} - (\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)S_{\mu,\nu}(x)$$

$$(3)\quad x\frac{\partial S_{\mu,\nu}(x)}{\partial x} + \nu\, S_{\mu,\nu}(x) = x(\mu+\nu-1)S_{\mu-1,\nu-1}(x)$$

$$(4)\quad x\frac{\partial S_{\mu,\nu}(x)}{\partial x} - \nu\, S_{\mu,\nu}(x) = x(\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(x)$$

$$(1)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 4(\nu-1)(\nu-2)\,S_{\mu+1,\nu-2}(x) = 2x(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x) - 2x(\nu-1)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x) \\ \Rightarrow 2x(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x) - 4(\nu-2)(\nu-1)\,S_{\mu+1,\nu-2}(x) = 2x(\nu-1)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x) \end{array}\right\}$$

$$(\textit{Résultat précédent})\quad \left\{\begin{array}{l} x(\mu+\nu-1)S_{\mu,\nu-2}(x) - 2(\nu-1)S_{\mu+1,\nu-1}(x) = x(\mu-\nu+1)S_{\mu,\nu}(x) \\ \Rightarrow x(\mu+\nu)S_{\mu+1,\nu-2}(x) - 2(\nu-1)S_{\mu+2,\nu-1}(x) = x(\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(x) \end{array}\right\}$$

$$(2)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} S_{\mu+2,\nu-1}(x) = x^{\mu+1} - (\mu+\nu)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x) \\ \Rightarrow (\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x) = \dfrac{x^{\mu+1} - S_{\mu+2,\nu-1}(x)}{(\mu+\nu)} \end{array}\right\}$$

Calculons $\quad 2x(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x) + \left(x^2 - 4(\nu-1)(\nu-2)\right)S_{\mu+1,\nu-2}(x) =$

$$= x\left\{xS_{\mu+1,\nu-2}(x) + 2(\nu-1)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x)\right\}$$

$$= x\left\{xS_{\mu+1,\nu-2}(x) + 2(\nu-1)\frac{x^{\mu+1} - S_{\mu+2,\nu-1}(x)}{(\mu+\nu)}\right\}$$

$$= \frac{x\left\{2(\nu-1)x^{\mu+1} + x(\mu+\nu)S_{\mu+1,\nu-2}(x) - 2(\nu-1)S_{\mu+2,\nu-1}(x)\right\}}{(\mu+\nu)} = \frac{x^2}{(\mu+\nu)}\left\{2(\nu-1)x^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(x)\right\}$$

Compte tenu de ces relations, il vient :

$$\left(x^2 - 4(\nu-1)(\nu-2)\right)S_{\mu+1,\nu-2}(x) + 2x(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x) =$$

$$= x\left\{xS_{\mu+1,\nu-2}(x) + 2(\nu-1)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(x)\right\}$$

$$= \frac{x^2}{(\mu+\nu)}\left\{2(\nu-1)x^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(x)\right\}$$

$$F(\lambda, x_0) = \frac{2}{\pi\lambda^{\mu+3}x_0}\left\{\lambda x_0 S_{\mu+1,\nu-2}(\lambda x_0) + 2(\nu-1)(\mu-\nu+2)S_{\mu,\nu-1}(\lambda x_0)\right\}$$

$$F(\lambda, x_0) = \frac{2}{\pi\lambda^{\mu+2}(\mu+\nu)}\left\{2(\nu-1)\lambda^{\mu}{x_0}^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)\right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{\mu+1}\left(J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right) = \frac{2\left\{2(\nu-1)\lambda^{\mu}{x_0}^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)\right\}}{\pi\lambda^{\mu+2}(\mu+\nu)}$$

En inversant la transformation généralisée de Weber-Orr, il vient ;

$$x > x_0 \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}\frac{2(\nu-1)\lambda^{\mu}{x_0}^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{(\mu+\nu)}\,\frac{J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} = x^{\mu}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}\left(2(\nu-1){x_0}^{\mu}\lambda^{\mu} + (\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)\right)\frac{J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} = \frac{\pi}{2}(\mu+\nu)x^{\mu}$$

Transformée de la fonction puissance $x^{2-\nu}$:

Calculons la transformée de Weber-Orr généralisée d'une fonction puissance $x^{2-\nu}$:

$$\int dx\, x^{3-\nu} J_{\nu-2}(x) = -x^{3-\nu} J_{\nu-3}(x) \quad \int dx\, x^{3-\nu} Y_{\nu-2}(x) = -x^{3-\nu} Y_{\nu-3}(x)$$

$$x^{3-\nu} J_{\nu-3}(x) \propto x^{\frac{5}{2}-\nu} \Rightarrow Pour\ \nu > \frac{5}{2} \quad \underset{x\to+\infty}{Lim}\, x^{3-\nu} J_{\nu-3}(x) = 0$$

$$\int dx\, x^{3-\nu} J_{\nu-2}(\lambda x) = -\frac{x^{3-\nu} J_{\nu-3}(\lambda x)}{\lambda} \quad \int dx\, x^{3-\nu} Y_{\nu-2}(x) = -\frac{x^{3-\nu} Y_{\nu-3}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{3-\nu} \left(J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)\right) = \frac{x_0^{3-\nu}}{\lambda} \left(J_{\nu-3}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-3}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0)\right)$$

$$Comme \quad Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-3}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-3}(\lambda x_0) = \frac{2}{\pi \lambda x_0}\left(1 - \frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{\lambda^2 x_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{3-\nu} \left(J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)\right) = \frac{2}{\pi} \frac{x_0^{2-\nu}}{\lambda^2}\left(1 - \frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{\lambda^2 x_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{3-\nu} \left(J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)\right) = \frac{2}{\pi \lambda^4 x_0^{\nu}}\left(\lambda^2 x_0^2 - 4(\nu-1)(\nu-2)\right)$$

Par la valeur de l'intégrale définie précédente, en appliquant la transformée inverse de Weber-Dirichlet, on démontre la formule suivante :

$$\forall \nu > \frac{5}{2} \quad x > x_0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(\lambda^2 x_0^2 - 4(\nu-1)(\nu-2)\right) \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} = \frac{\pi}{2} x_0^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}.$$

Posons quelques notations des intégrales indéfinies suivantes :

$$I_{0,\nu}^{(1)}(x, x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{J_\nu(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu}$$

$$I_{2,\nu}^{(1)}(x, x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2}$$

$$I_{1,\nu}^{(2)}(x, x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-1}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2} = -\frac{\pi}{4(\nu-1)} x_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-1}.$$

$$I_{2,\nu}^{(3)}(x, x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{\left(J_\nu(\lambda x_0)\right)^2 + \left(Y_\nu(\lambda x_0)\right)^2}$$

On arrive aux résultats suivants :

$$\text{Alors} \quad {x_0}^2 I_{2,\nu}^{(1)}(x,x_0) - 4(\nu-1)(\nu-2) I_{2,\nu}^{(3)}(x,x_0) = \frac{\pi}{2} {x_0}^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}$$

$$\text{De plus} \quad J_{\nu-2}(\lambda x) = \frac{2(\nu-1)}{\lambda x} J_{\nu-1}(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) \quad Y_{\nu-2}(\lambda x) = \frac{2(\nu-1)}{\lambda x} Y_{\nu-1}(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)$$

$$J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2(\nu-1)}{\lambda x} \left(J_{\nu-1}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-1}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0) \right) - \\ -\left(J_\nu(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_\nu(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0) \right) \end{array} \right\} .$$

$$\Rightarrow I_{2,\nu}^{(1)}(x,x_0) = \frac{2(\nu-1)}{x} I_{1,\nu}^{(2)}(x,x_0) - I_{0,\nu}^{(1)}(x,x_0) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-1} \frac{x_0}{x} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \forall \nu > \frac{5}{2} \quad I_{2,\nu}^{(1)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$$

$$\Rightarrow I_{2,\nu}^{(3)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{8(\nu-1)(\nu-2)} {x_0}^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}$$

Ce qui une fois réinjecté dans la formule de la transformée inverse d'une fonction puissance, donne :

$$x > x_0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}} \left(2(\nu-1){x_0}^\mu \lambda^\mu + (\mu-\nu+2) S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) \right) \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2}(\mu+\nu) x^\mu$$

$$\Rightarrow x > x_0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}} S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0) \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(\mu+\nu)}{(\mu-\nu+2)} x^\mu$$

Passons maintenant à la limite x=x0 pour la fonction puissance $x^{2-\nu}$ *:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \frac{J_{\nu-2}(\lambda x) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-2}(\lambda x) J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{8(\nu-1)(\nu-2)} {x_0}^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}$$

$$\text{Comme} \quad Y_\nu(\lambda x_0) J_{\nu-2}(\lambda x_0) - J_\nu(\lambda x_0) Y_{\nu-2}(\lambda x_0) = -\frac{4(\nu-1)}{\pi \lambda^2 {x_0}^2} .$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5} \frac{1}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = \frac{\pi^2 {x_0}^4}{32(\nu-1)^2(\nu-2)}$$

Soit en s'affranchissant de la valeur x0, il vient :

$$\forall \nu > \frac{5}{2} \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5} \frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2 + (Y_\nu(\lambda))^2} = \frac{\pi^2}{32(\nu-1)^2(\nu-2)} .$$

Il se trouve que le passage à la limite x=x0 ne produit pas de contradiction dans ce cas. Mais il n'en est pas de même pour une fonction puissance quelconque. Comme on va le voir par la suite.

Passage à la limite en x=x0 pour la fonction puissance x^{μ} *:*

Comme $Y_\nu(\lambda x_0)J_{\nu-2}(\lambda x_0)-J_\nu(\lambda x_0)Y_{\nu-2}(\lambda x_0)=-\dfrac{4(\nu-1)}{\pi\lambda^2 {x_0}^2}$

$$x=x_0\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)\frac{J_{\nu-2}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2}{x_0}^{\mu}\frac{(\mu+\nu)}{(\mu-\nu+2)}.$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+3}}\frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi^2}{8}{x_0}^{\mu+2}\frac{(\mu+\nu)}{(\nu-1)(\mu-\nu+2)}\Rightarrow contradiction$$

Or on a établit auparavant $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+3}}\frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(\mu-\nu+2)}$

Donc par ce simple passage à la limite x=x0 dans ce cas, on ne parvient pas à établir la formule correcte. Si l'on part de la bonne formule à savoir : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+3}}\frac{S_{\mu+1,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(\mu-\nu+2)}$

Il vient les formules suivantes que l'on a déjà établit avec la transformation généralisée de Weber-Orr du cas μ=ν-1 :

$$\mu=-2\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{S_{-1,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{4\nu}$$

$$\mu=-2\quad \nu=2\quad S_{-1,2}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_2(\lambda))^2+(Y_2(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\mu=-2\quad \nu=4\quad S_{-1,4}(\lambda)=S_{-1,4}(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{12}{\lambda^2}\right)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(1+\frac{12}{\lambda^2}\right)\frac{1}{(J_4(\lambda))^2+(Y_4(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{16}$$

<u>Transformation généralisée de Weber-Orr vers l'arrière (cas μ=ν-l)</u>

Commençons par formaliser quelques résultats sur les intégrales définies que l'on vient de calculer

<u>Règles de récurrence sur certaines intégrales définies</u>

Soit l'intégrale définie suivante : $I_{l,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^p}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$.

Appliquons lui les règles de récurrence des fonctions de Bessel, il vient :

$$J_{\mu-2}(\lambda x)=\frac{2(\mu-1)}{\lambda x}J_{\mu-1}(\lambda x)-J_\mu(\lambda x)\quad Y_{\mu-2}(\lambda x)=\frac{2(\mu-1)}{\lambda x}Y_{\mu-1}(\lambda x)-Y_\mu(\lambda x)$$

$$\mu-2=\nu-l\Rightarrow\mu=\nu-l+2\Rightarrow\mu-1=\nu-l+1$$

$$\Rightarrow J_{\nu-l}(\lambda x)=\frac{2(\nu-l+1)}{\lambda x}J_{\nu-l+1}(\lambda x)-J_{\nu-l+2}(\lambda x)\quad Y_{\nu-l}(\lambda x)=\frac{2(\nu-l+1)}{\lambda x}Y_{\nu-l+1}(\lambda x)-Y_{\nu-l+2}(\lambda x)$$

$$I_{l,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^p}\frac{\left\{\frac{2(\nu-l+1)}{\lambda x}J_{\nu-l+1}(\lambda x)-J_{\nu-l+2}(\lambda x)\right\}Y_\nu(\lambda x_0)-\left\{\frac{2(\nu-l+1)}{\lambda x}Y_{\nu-l+1}(\lambda x)-Y_{\nu-l+2}(\lambda x)\right\}J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$$

$$\Rightarrow I_{l,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\begin{cases}\frac{2(\nu-l+1)}{x}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{p+1}}\frac{J_{\nu-l+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}-\\-\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^p}\frac{J_{\nu-l+2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l+2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_{l,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\frac{2(\nu+1-l)}{x}I_{l-1,\nu}^{(p+1)}(x,x_0)-I_{l-2,\nu}^{(p)}(x,x_0)\\I_{l,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\frac{2(\nu-1-l)}{x}I_{l+1,\nu}^{(p+1)}(x,x_0)-I_{l+2,\nu}^{(p)}(x,x_0)\end{cases}$$

Appliquons ces règles de récurrences aux résultats obtenus auparavant, à savoir :

$$(1)\quad I_{0,\nu}^{(1)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{x_0}{x}\right)^\nu$$

$$(2)\quad I_{2,\nu}^{(1)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\equiv0$$

$$(3)\quad I_{1,\nu}^{(2)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\frac{J_{\nu-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{4(\nu-1)}x_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-1}$$

$$(4)\quad I_{2,\nu}^{(3)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{J_{\nu-2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{8(\nu-1)(\nu-2)}x_0^2\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}.$$

$$l=3\Rightarrow I_{3,\nu}^{(p)}(x,x_0)=\frac{2(\nu-2)}{x}I_{2,\nu}^{(p+1)}(x,x_0)-I_{1,\nu}^{(p)}(x,x_0)$$

$$l=3\quad p=2\Rightarrow I_{3,\nu}^{(2)}(x,x_0)=\frac{2(\nu-2)}{x}I_{2,\nu}^{(3)}(x,x_0)-I_{1,\nu}^{(2)}(x,x_0)$$

$$\Rightarrow I_{3,\nu}^{(2)}(x,x_0)=-\frac{\pi}{4(\nu-1)}x_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-2}\frac{x_0}{x}+\frac{\pi}{4(\nu-1)}x_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-1}=0$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\frac{J_{\nu-3}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-3}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\equiv0$$

De ces résultats, nous pouvons par exemple faire l'hypothèse :

$$0<l\in N<\nu\quad I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-1}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\equiv0\cdot$$

Dérivons l'intégrale précédente :

$$\frac{\partial J_{\nu-l}(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(J_{\nu-l-1}(\lambda x)-\frac{\nu-l}{\lambda x}J_{\nu-l}(\lambda x)\right)\quad\frac{\partial Y_{\nu-1}(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(Y_{\nu-l-1}(\lambda x)-\frac{\nu-l}{\lambda x}Y_{\nu-l}(\lambda x)\right)$$

$$I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-1}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\equiv 0$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-2}}\frac{\left(J_{\nu-l-1}(\lambda x)-\frac{\nu-l}{\lambda x}J_{\nu-l}(\lambda x)\right)Y_\nu(\lambda x_0)-\left(Y_{\nu-l-1}(\lambda x)-\frac{\nu-l}{\lambda x}Y_{\nu-l}(\lambda x)\right)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-2}}\frac{(J_{\nu-l-1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l-1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0))}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}-\frac{\nu-l}{x}I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)=0$$

$$=I_{l+1,\nu}^{(l-2)}(x,x_0)=0$$

Donc on arrive au résultat suivant : $I_{l,\nu}^{(l-3)}(x,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-3}}\frac{(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0))}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\equiv 0$.

Si on applique la récurrence à l'intégrale identiquement nulle on arrive au même résultat:

$$(1)\quad I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)=\frac{2(\nu+1-l)}{x}I_{l-1,\nu}^{(l)}(x,x_0)-I_{l-2,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)\Rightarrow\frac{2(\nu-l)}{x}I_{l,\nu}^{(l+1)}(x,x_0)=I_{l-1,\nu}^{(l)}(x,x_0)$$

$$(2)\quad I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)=\frac{2(\nu-1-l)}{x}I_{l+1,\nu}^{(l)}(x,x_0)-I_{l+2,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)$$

Comme $I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)\equiv I_{l+1,\nu}^{(l)}(x,x_0)\equiv 0\quad(2)\Rightarrow I_{l+2,\nu}^{(l-1)}(x,x_0)\equiv 0\Rightarrow I_{l,\nu}^{(l-3)}(x,x_0)\equiv 0$

Ce résultat reste valable tant que l'intégrande garde une puissance en 1/λ. Mais la règle de récurrence établit ne permet pas pour l'instant de calculer toutes les intégrales définies de la forme proposée.

Calculons la transformée généralisée de Weber-Orr pour μ=ν-l pour une fonction puissance $x^{l-\nu}$ *:*

$$\int dx\, x^{l+1-\nu}J_{\nu-l}(x)=-x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x)\quad\int dx\, x^{l+1-\nu}Y_{\nu-l}(x)=-x^{l+1-\nu}Y_{\nu-(l+1)}(x)$$

$$x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x)\propto x^{l+\frac{1}{2}-\nu}\Rightarrow Pour\ \nu>l+\frac{1}{2}\quad\lim_{x\to+\infty}x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x)=0$$

$$\int dx\, x^{l+1-\nu}J_{\nu-l}(\lambda x)=-\frac{x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(\lambda x)}{\lambda}\quad\int dx\, x^{l+1-\nu}Y_{\nu-l}(x)=-\frac{x^{l+1-\nu}Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{l+1-\nu}(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0))=\frac{x_0^{l+1-\nu}}{\lambda}(J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0))$$

Le produit croisé obtenu fait intervenir les polynômes de Lommel selon la formule suivante :

$$J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\frac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$$

$$Terme\ dominant\ R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=\frac{2^l(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{\lambda^l x_0^{\,l}}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}Terme\ dominant\ J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)\\=-\dfrac{2^{l+1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{\pi\,\lambda^{l+1}x_0^{\,l+1}}\end{array}\right.$$

La transformée de Weber-Orr généralisée de la fonction puissance $x^{l-\nu}$ *est donc la suivante :*

$$\int_{x_0}^{+\infty}dx\, x^{l+1-\nu}(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0))=-\frac{2x_0^{\,l-\nu}}{\pi\lambda^2}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$$

On peut donc déduire de la transformée inverse l'intégrale définie suivante valable pour x> x0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2} {x_0}^{\nu-l} x^{l-\nu}$$

Si par hypothèse tous les termes non dominant du polynôme de Lommel conduisent à des intégrales identiquement nulles. Il ne reste que le terme dominant qui donne l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}} 2^l (\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l) \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2} {x_0}^{\nu} x^{l-\nu}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}} \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2^{l+1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)} {x_0}^{\nu} x^{l-\nu}$$

Ce qui est le résultat recherché. Reste à démontrer que les termes non dominants de l'intégrande conduisent à une valeur nulle. Il se trouve que les polynômes de Lommel sont soit des polynômes paires ou impaires, les termes successifs sont donc séparés à chaque fois d'une puissance double. Or nous avons démontré par la règle de récurrence que les deux intégrales suivantes étaient identiquement nulle :

$$I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-1}} \frac{\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$$

$$\Rightarrow I_{l,\nu}^{(l-3)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-3}} \frac{\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$$

Les deux intégrandes sont donc séparées par une puissance double de 1/λ. Par ailleurs le terme immédiatement inférieur au terme dominant dans l'intégrande de départ est identiquement nul :

Terme antérieur au terme dominant dans $R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) \propto \frac{1}{\lambda^{l-2}} \Rightarrow \propto \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-1}} \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$

On a donc bien le résultat que toutes les autres intégrales sont nulles hormis celle du terme dominant.

On arrive aux résultats suivants :

$$\forall \nu, l \quad tq \quad 0 < l \in N < \nu$$

$$I_{l,\nu}^{(l-1)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-1}} \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$$

$$I_{l,\nu}^{(l-3)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-3}} \frac{\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0$$

$$I_{l,\nu}^{(l-(2p+1))}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l-(2p+1)}} \frac{\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} \equiv 0 \Leftarrow \text{en dérivant autant de fois qu'il le faut}$$

$$I_{l,\nu}^{(l+1)}(x,x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}} \frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2^{l+1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)} {x_0}^{l} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\nu-l}$$

Si à partir de la dernière formule on passe à la limite x=x0, il vient :

$$I_{l,\nu}^{(l+1)}(x_0,x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{2^{l+1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}x_0{}^{l}$$

De plus $J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\frac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$.

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+2}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}x_0{}^{l+1}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+2}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}$$

Tirons partie des relations de récurrence sur les polynômes de Lommel suivantes :

$$(0)\quad R_{-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=0\quad R_{0,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

$$(1)\quad R_{l-1,\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-1)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(2)\quad R_{l-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu+l)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1)\Rightarrow R_{l-1,\nu-l+1}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu-l-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-l-1)}{x}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réalisons une combinaison linéaire de deux intégrales successives, permettant de reproduire la relation (2), il vient également un résultat notable:

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+2}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+3}}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+3}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)(\nu-l-1)}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}\left\{R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{2(\nu-l-1)}{\lambda}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}R_{l+1,\nu-1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}R_{l+1,\nu-1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0$$

Cette dernière relation est très pratique pour trouver des nouvelles intégrales définies :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0\cdot$$

Nous savons que :

$$\forall\nu>\frac{3}{2}\quad\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{8(\nu-1)}$$

$$\forall\nu>\frac{5}{2}\quad\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{32(\nu-1)^2(\nu-2)}$$

Prenons l=2, les deux intégrales précédentes vérifient bien la relation établie:

$$l=2 \Rightarrow R_{2,\nu-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-1+\frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{\lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}R_{2,\nu-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\left(\frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{\lambda^2}-1\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0\,.$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{1}{4(\nu-1)(\nu-2)}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}$$

Prenons l=3, il vient une nouvelle intégrale :

$$l=3 \Rightarrow R_{3,\nu-3}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-\frac{4(\nu-2)}{\lambda}+\frac{8(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{\lambda^3}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^4}R_{3,\nu-3}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^4}\left(\frac{2(\nu-1)(\nu-3)}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{1}{2(\nu-1)(\nu-3)}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2}{64(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu-3)}$$

Prenons l=4, il vient encore une nouvelle intégrale :

$$l=4 \Rightarrow R_{4,\nu-4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1-\frac{12(\nu-2)(\nu-3)}{\lambda^2}+\frac{16(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{\lambda^4}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}R_{4,\nu-4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^9}\frac{1}{(J_\nu(\lambda))^2+(Y_\nu(\lambda))^2}=\frac{\pi^2(5\nu-11)}{512(\nu-1)^4(\nu-2)^2(\nu-3)(\nu-4)}\,.$$

<u>Transformée Généralisée de Weber-Orr vers l'arrière de la fonction puissance x^μ :</u>

Prenons également la fonction puissance : $f(x)=x^\mu$. La condition imposée pour la convergence de la transformation intégrale est notamment la finitude de l'intégrale :

$$\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^\mu\sqrt{t}=\int_{\lambda x_0}^{+\infty}dt\,t^{\mu+\frac{1}{2}}<\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}t^{\mu+\frac{3}{2}}=0 \Rightarrow \mu<-\frac{3}{2}$$

Le comportement asymptotique des fonctions de Lommel de deuxième espèce à +∞ est connu:

$$S_{\mu,\nu}(x)\approx x^{\mu-1}\left(1-\frac{(\mu-1)^2-\nu^2}{x^2}+\frac{\left[(\mu-1)^2-\nu^2\right]\left[(\mu-3)^2-\nu^2\right]}{x^4}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)$$

Celui des fonctions de Bessel également : $J_\nu(x)\propto x^{-\frac{1}{2}}\quad Y_\nu(x)\propto x^{-\frac{1}{2}}\quad \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial x}\propto x^{-\frac{1}{2}}\quad \frac{\partial Y_\nu(x)}{\partial x}\propto x^{-\frac{1}{2}}$

Rappelons les intégrales indéfinies suivantes faisant intervenir les fonctions de Lommel de deuxième espèce (mais également de première espèce, toutefois ces dernières sont moins commodes à utiliser):

$$S_{\mu,\nu}(z)\quad \textit{Lommel deuxième espèce}\quad \begin{cases}\int dz\,z^\mu J_\nu(z)=z\left[(\mu+\nu-1)J_\nu(z)S_{\mu-1,\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)S_{\mu,\nu}(z)\right]\\ \int dz\,z^\mu Y_\nu(z)=z\left[(\mu+\nu-1)Y_\nu(z)S_{\mu-1,\nu-1}(z)-Y_{\nu-1}(z)S_{\mu,\nu}(z)\right]\end{cases}$$

Il advient donc les expressions suivantes des intégrales définies liées à la transformation de Weber-Orr généralisée, uniquement valable **pour μ<-1/2 :**

$$\int dz\, z^{\mu+1} J_{\nu-l}(z) = z\left[(\mu+\nu-l) J_{\nu-l}(z) S_{\mu,\nu-l-1}(z) - J_{\nu-l-1}(z) S_{\mu+1,\nu-l}(z)\right]$$

$$\int dz\, z^{\mu+1} Y_{\nu-l}(z) = z\left[(\mu+\nu-l) Y_{\nu-l}(z) S_{\mu,\nu-l-1}(z) - Y_{\nu-l-1}(z) S_{\mu+1,\nu-l}(z)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{\nu-l}(t) = \lambda x_0 \left(J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l) J_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right) \\ \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{\nu-l}(t) = \lambda x_0 \left(Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l) Y_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right) \end{cases}$$

$$F(\lambda, x_0) = \left\{ Y_\nu(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{\nu-l}(t) - J_\nu(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{\nu-l}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \left\{ Y_\nu(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{\nu-l}(t) - J_\nu(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{\nu-l}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}} \begin{Bmatrix} Y_\nu(\lambda x_0)\left\{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l) J_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right\} - \\ - J_\nu(\lambda x_0)\left\{Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l) Y_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{x_0}{\lambda^{\mu+1}} \begin{Bmatrix} S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\left\{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0)\right\} - \\ -(\mu+\nu-l) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\left\{J_{\nu-l}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0)\right\} \end{Bmatrix}$$

$$Comme \quad \begin{cases} J_{\nu-l}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0) = -\frac{2}{\pi \lambda x_0} R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) \\ \Rightarrow J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0) = -\frac{2}{\pi \lambda x_0} R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{2}{\pi \lambda^{\mu+2}} \left\{ (\mu+\nu-l) R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0) - R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) \right\}$$

L'expression à simplifier est la suivante : $(\mu+\nu-l)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu,\nu-l-1}(x)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)$.

Utilisons les récurrences sur les polynômes de Lommel :

$$(0)\quad R_{-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=0\quad R_{0,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

$$(1)\quad R_{l-1,\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-1)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(2)\quad R_{l-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu+l)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}R_{l-1,\nu-l+1}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu-l-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-l-1)}{x}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)\\ R_{l-2,\nu-l+2}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-l)}{x}R_{l-1,\nu-l+1}\left(\frac{1}{x}\right)\\ R_{l-3,\nu-l+3}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l-1,\nu-l+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-l+1)}{x}R_{l-2,\nu-l+2}\left(\frac{1}{x}\right)\end{cases}$$

Ainsi que les récurrences sur les fonctions de Lommel :

$$(1)\quad 2\nu\, S_{\mu,\nu}(x)=x(\mu+\nu-1)S_{\mu-1,\nu-1}(x)-x(\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(x)$$

$$(1)\Rightarrow 2(\nu-l)S_{\mu+1,\nu-l}(x)=x(\mu+\nu-l)S_{\mu,\nu-l-1}(x)-x(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)$$

$$\Rightarrow(\mu+\nu-l)S_{\mu,\nu-l-1}(x)=\frac{2(\nu-l)S_{\mu+1,\nu-l}(x)}{x}+(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)$$

$$(1)\Rightarrow 2(\nu-l+1)S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)=x(\mu+\nu-l+2)S_{\mu+1,\nu-l}(x)-x(\mu-\nu+l)S_{\mu+1,\nu-l+2}(x).$$

$$S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)=\frac{x\{(\mu+\nu-l+2)S_{\mu+1,\nu-l}(x)-(\mu-\nu+l)S_{\mu+1,\nu-l+2}(x)\}}{2(\nu-l+1)}$$

$$(2)\Rightarrow S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)=x^{\mu+1}-(\mu+\nu-l+2)(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)$$

$$\Rightarrow(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)=\frac{x^{\mu+1}-S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)}{(\mu+\nu-l+2)}$$

Il vient :

$$R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu+\nu-l)\,S_{\mu,\nu-l-1}(x)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)$$

$$=R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\left\{\frac{2(\nu-l)S_{\mu+1,\nu-l}(x)}{x}+(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)\right\}-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)$$

$$=R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu-\nu+l)S_{\mu,\nu-l+1}(x)+\left\{\frac{2(\nu-l)}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}S_{\mu+1,\nu-l}(x)$$

$$=R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{\mu+1}-S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)}{(\mu+\nu-l+2)}+R_{l-2,\nu-l+2}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)$$

$$=\frac{R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\left\{x^{\mu+1}-S_{\mu+2,\nu-l+1}(x)\right\}+R_{l-2,\nu-l+2}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu+\nu-l+2)S_{\mu+1,\nu-l}(x)}{(\mu+\nu-l+2)}\,.$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)2(\nu-l+1)x^{\mu+1}+xR_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu-\nu+l)S_{\mu+1,\nu-l+2}(x)\\+x\left\{\frac{2(\nu-l+1)}{x}R_{l-2,\nu-l+2}\left(\frac{1}{x}\right)-R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(\mu+\nu-l+2)S_{\mu+1,\nu-l}(x)\end{array}\right\}}{2(\nu-l+1)(\mu+\nu-l+2)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)2(\nu-l+1)x^{\mu+1}+xR_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu-\nu+l)S_{\mu+1,\nu-l+2}(x)\\+xR_{l-3,\nu-l+3}\left(\frac{1}{x}\right)(\mu+\nu-l+2)S_{\mu+1,\nu-l}(x)\end{array}\right\}}{2(\nu-l+1)(\mu+\nu-l+2)}$$

Le calcul a l'air juste, mais en réalité il n'est pas tellement plus simple. Le seul mérite c'est de diminuer l'ordre du polynôme de Lommel :

$$(\mu+\nu-l)R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu,\nu-l-1}(x)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)=$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}2(\nu-l+1)x^{\mu+1}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)+x(\mu-\nu+l)R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l+2}(x)\\+x(\mu+\nu-l+2)R_{l-3,\nu-l+3}\left(\frac{1}{x}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(x)\end{array}\right\}}{2(\nu-l+1)(\mu+\nu-l+2)}\,.$$

Vérification si l=2 :

$$l=2\Rightarrow R_{l-3,\nu-l+3}\left(\frac{1}{x}\right)=0\quad R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)=R_{1,\nu-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-1)}{x}\quad R_{2,\nu-2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{x^2}-1$$

$$\Rightarrow\frac{2(\nu-1)}{x}(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x)+\left\{1-\frac{4(\nu-1)(\nu-2)}{x^2}\right\}S_{\mu+1,\nu-2}(x)=\frac{2(\nu-1)x^{\mu}+(\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(x)}{(\mu+\nu)}\,.$$

$$\Rightarrow 2x(\nu-1)(\mu+\nu-2)S_{\mu,\nu-3}(x)+\left\{x^2-4(\nu-1)(\nu-2)\right\}S_{\mu+1,\nu-2}(x)=x^2\,\frac{2(\nu-1)x^{\mu}+(\mu-\nu+2)S_{\mu+1,\nu}(x)}{(\mu+\nu)}$$

En inversant la transformée, il vient l'intégrale définie suivante :

$$\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu+l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$

$$\forall x\ x>x_0 \quad f(x)=x^\mu=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,F(\lambda,x_0)\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$$

$$\Rightarrow \forall x\ x>x_0 \quad x^\mu=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}\frac{\left\{(\mu+\nu-l)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\right\}\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$$

$$\Rightarrow \forall x\ x>x_0 \quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}\frac{\left\{(\mu+\nu-l)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\right\}\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2}x^\mu$$

Transformation généralisée de Weber-Neumann vers l'arrière

Ce qui suit est tout à fait expérimental, et sans aucune preuve formelle, mais imaginons que l'inversion de la transformation construite comme telle, soit possible :

$$\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_\mu(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_\mu(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0) \quad \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0) \end{cases}$$

Plus précisément regardons les transformations avec le paramètre μ=ν-l :

$$\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0) \quad \begin{cases} F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x) \\ f(x)=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0) \end{cases}$$

Calculons la transformée généralisée de Weber-Orr pour μ=ν-l pour une fonction puissance $x^{l-\nu}$ *:*

$$\int dx\,x^{l+1-\nu}J_{\nu-l}(x)=-x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x) \quad \int dx\,x^{l+1-\nu}Y_{\nu-l}(x)=-x^{l+1-\nu}Y_{\nu-(l+1)}(x)$$

$$x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x)\propto x^{l+\frac{1}{2}-\nu} \Rightarrow Pour\ \nu>l+\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to+\infty}x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(x)=0$$

$$\int dx\,x^{l+1-\nu}J_{\nu-l}(\lambda x)=-\frac{x^{l+1-\nu}J_{\nu-(l+1)}(\lambda x)}{\lambda} \quad \int dx\,x^{l+1-\nu}Y_{\nu-l}(x)=-\frac{x^{l+1-\nu}Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty}dx\,x^{l+1-\nu}\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)\right)=\frac{x_0^{l+1-\nu}}{\lambda}\left(J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)\right)$$

Le produit croisé obtenu fait intervenir les polynômes de Lommel qui sont en relation de récurrence comme suit :

$$
\begin{aligned}
&(0)\quad R_{-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \quad R_{0,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=1\\
&(1)\quad R_{l-1,\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu-1)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&(2)\quad R_{l-1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l+1,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2(\nu+l)}{x}R_{l,\nu}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&(2)\Rightarrow R_{l-2,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2\nu}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\Rightarrow \frac{\nu}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)=R_{l-2,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)+R_{l,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\nu}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\Rightarrow \frac{\nu}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)-R_{l-2,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)=R_{l,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\nu}{x}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Le produit croisée se présente maintenant comme suit :

$$
\frac{\partial J_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(J_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}J_\nu(\lambda x)\right) \quad \frac{\partial Y_\nu(\lambda x)}{\partial x}=\lambda\left(Y_{\nu-1}(\lambda x)-\frac{\nu}{\lambda x}Y_\nu(\lambda x)\right)
$$

$$
\Rightarrow J_\nu'(\lambda x_0)=J_{\nu-1}(\lambda x_0)-\frac{\nu}{\lambda x_0}J_\nu(\lambda x_0) \quad Y_\nu'(\lambda x_0)=Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-\frac{\nu}{\lambda x_0}Y_\nu(\lambda x_0)
$$

$$
\Rightarrow J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)=\left\{\begin{array}{l} J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)\left(Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}Y_\nu(\lambda x_0)\right)-\\ -Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)\left(J_{\nu-1}(\lambda x_0)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}J_\nu(\lambda x_0)\right)\end{array}\right\}
$$

$$
\Rightarrow J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)=\left\{\begin{array}{l} \left(J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)\right)\\ -\dfrac{\nu}{\lambda x_0}\left(J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)\right)\end{array}\right\}.
$$

$$
Comme\quad \left\{\begin{array}{l} J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ J_{\nu-1-l}(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_{\nu-1-l}(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\end{array}\right.
$$

$$
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} J_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-(l+1)}(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}\left(\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right)\\ J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu'(\lambda x_0)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}\left(R_{l,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right)\end{array}\right.
$$

Cela donne l'intégrale définie suivante :

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{l+1-\nu}\left(J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)\right)=\frac{2{x_0}^{l-\nu}}{\pi\lambda^2}\left(\frac{\nu}{\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)-R_{l-1,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\right)$$

On peut donc déduire de la transformée inverse, si tant est que l'inversion soit prouvée, l'intégrale définie suivante valable pour x> x0 :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\left\{\frac{\nu}{\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)-R_{l-1,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\right\}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2}{x_0}^{\nu-l}x^{l-\nu}$$

<u>Conjecture générale qui reste à démontrer</u>

$$\forall p\in\mathbf{N}\quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-2p}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=0\,.$$

De même en dérivant par rapport à x, il vient :

$$\forall p\in\mathbf{N}\quad \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l-2p-1}}\frac{J_{\nu-l}'(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}'(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=0\,.$$

Cela a une conséquence importante, comme les termes dominants des deux polynômes de Lommel sont respectivement :

$$R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=\frac{2^l(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{\lambda^l {x_0}^l}+\cdots$$

$$R_{l-1,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=\frac{2^{l-1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l+1)}{\lambda^{l-1} {x_0}^l}+\cdots$$

Alors :
$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}R_{l-1,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=0$$

L'intégrale indéfinie prend alors la forme :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2\nu}x_0{x_0}^{\nu-l}x^{l-\nu}$$

On constate pour les mêmes raisons que seul le terme dominant du polynôme de Lommel reste, il vient alors une intégrale définie de forme assez simple :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\left\{\frac{2^l(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{\lambda^l {x_0}^l}+\frac{B}{\lambda^{l-2}{x_0}^{l-2}}\right\}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2\nu}x_0{x_0}^{\nu-l}x^{l-\nu}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{(J_\nu'(\lambda x_0))^2+(Y_\nu'(\lambda x_0))^2}=\frac{\pi}{2^{l+1}\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{x_0}^{\nu+1}x^{l-\nu}$$

Maintenant le passage formel à x=x0 peut être réalisé sans dommage, et l'on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+2}}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}=\frac{\pi}{2^{l+1}\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{x_0}^{\nu+1}x^{l-\nu}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+3}}\frac{\left(R_{l,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)-\frac{\nu}{\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\right)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+2}\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}{x_0}^{l+2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{l+3}}\frac{\left(R_{l,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{\nu}{\lambda}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{2^{l+2}\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-l)}$$

Pour l=0 : $\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\frac{1}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{4\nu}$

Pour l=1 : $\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{8\nu^2(\nu-1)}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{\left(\frac{2\nu(\nu-1)}{\lambda^2}-1\right)}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{16\nu(\nu-1)(\nu-2)}$$

Pour l=2 :

$$\Rightarrow 2\nu(\nu-1)\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{16\nu(\nu-1)(\nu-2)}+\frac{\pi^2}{8\nu^2(\nu-1)}$$

$$\Rightarrow 2\nu(\nu-1)\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2}{8\nu(\nu-1)}\left\{\frac{1}{2(\nu-2)}+\frac{1}{\nu}\right\}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^7}\frac{1}{\left(J_\nu'(\lambda)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda)\right)^2}=\frac{\pi^2(3\nu-4)}{32\nu^3(\nu-1)^2(\nu-2)}$$

Par contre pour des valeurs paires ou impaires trop importantes, il y a un problème de convergence de l'intégrale numérique probablement lié à l'implémentation des fonctions de Bessel et à leur dérivée première.

<u>*Transformée Généralisée de Weber-Neumann vers l'arrière de la fonction puissance x^{μ} :*</u>

$$\begin{cases} \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ J_{\nu-l}(t) = \lambda x_0 \left(J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ J_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right) \\ \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ Y_{\nu-l}(t) = \lambda x_0 \left(Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ Y_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\right) \end{cases}$$

$$J_\nu'(\lambda x_0) = J_{\nu-1}(\lambda x_0) - \frac{\nu}{\lambda x_0} J_\nu(\lambda x_0) \quad Y_\nu'(\lambda x_0) = Y_{\nu-1}(\lambda x_0) - \frac{\nu}{\lambda x_0} Y_\nu(\lambda x_0)$$

$$F(\lambda, x_0) = \left\{ Y_\nu'(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ J_{\nu-l}(t) - J_\nu'(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ Y_{\nu-l}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \left\{ Y_\nu'(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ J_{\nu-l}(t) - J_\nu'(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\ t^{\mu+1}\ Y_{\nu-l}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}} \begin{Bmatrix} Y_\nu'(\lambda x_0) \{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ J_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\} - \\ - J_\nu'(\lambda x_0) \{Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ Y_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}} \begin{Bmatrix} \left\{ Y_{\nu-1}(\lambda x_0) - \frac{\nu}{\lambda x_0} Y_\nu(\lambda x_0) \right\} \{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ J_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\} - \\ - \left\{ J_{\nu-1}(\lambda x_0) - \frac{\nu}{\lambda x_0} J_\nu(\lambda x_0) \right\} \{Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) - (\mu+\nu-l)\ Y_{\nu-l}(\lambda x_0) S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{x_0}{\lambda^{\mu+1}} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) \{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_0) - Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_0)\} - \\ -(\mu+\nu-l)\ S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0) \{J_{\nu-l}(\lambda x_0) Y_{\nu-1}(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x_0) J_{\nu-1}(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix} \\ - \frac{\nu}{\lambda x_0} \begin{Bmatrix} S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0) \{J_{\nu-l-1}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0)\} - \\ -(\mu+\nu-l)\ S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0) \{J_{\nu-l}(\lambda x_0) Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu-l}(\lambda x_0) J_\nu(\lambda x_0)\} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne le résultat final :

$$Comme\quad\begin{cases}J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ \Rightarrow J_{\nu-l-1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ \Rightarrow J_{\nu-l-1}(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_{\nu-l-1}(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ \Rightarrow J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_{\nu-1}(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_{\nu-1}(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-2,\nu-l+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=-\frac{2}{\pi\lambda x_0}\frac{x_0}{\lambda^{\mu+1}}\left\{\begin{array}{l}S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-(\mu+\nu-l)\,S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)R_{l-2,\nu-l+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ -\dfrac{\nu}{\lambda x_0}\left\{S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-(\mu+\nu-l)\,S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right\}\end{array}\right\}.$$

$$\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\frac{2}{\pi\lambda^{\mu+2}}\left\{\begin{array}{l}(\mu+\nu-l)\,S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\left\{R_{l-2,\nu-l+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right\}-\\ -S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\left\{R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right\}\end{array}\right\}$$

Une fois cette fonction inversée, on obtient l'intégrale indéfinie suivante valable pour x> x0 :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+1}}\left\{\begin{array}{l}(\mu+\nu-l)\,S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)\left\{\begin{array}{l}R_{l-2,\nu-l+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-\\ -\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\end{array}\right\}-\\ -S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\left\{R_{l-1,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda x_0}R_{l,\nu-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\right\}\end{array}\right\}\frac{J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu'(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu'(\lambda x_0)}{\left(J_\nu'(\lambda x_0)\right)^2+\left(Y_\nu'(\lambda x_0)\right)^2}=\frac{\pi}{2}x^\mu$$

Une formule de transformation de la fonction Puissance utilisant un noyau mixte vers l'arrière de type Weber-Neumann

Soit le noyau mixte suivant : $\tilde{\Psi}_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-l}'(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}'(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{\partial x}$

Et la transformation de Weber-Dirichlet vers l'arrière :

$$\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$

$$\begin{cases} W_{\nu-l,\nu}\{f(x)\}=F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x) \\ f(x)=W_{\nu-l,\nu}^{-1}\{F(\lambda,x_0)\}=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0) \end{cases}$$

Par la transformation de Weber-Dirichlet vers l'arrière la fonction puissance devient :

$$F(\lambda,x_0)=W_{\nu-l,\nu}\{x^\mu\}=\frac{2}{\pi\lambda^{\mu+2}}\left\{(\mu+\nu-l)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu,\nu-l-1}(\lambda x_0)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu+1,\nu-l}(\lambda x_0)\right\}.$$

Prenons un noyau mixte et regardons comment toute fonction est transformée :

$$\tilde{\Psi}_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu-l}'(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}'(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{\partial x}$$

$$\tilde{W}_{\nu-l,\nu}\{f(x)\}=F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\tilde{\Psi}_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\frac{\partial\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{\partial x}f(x)=\frac{1}{\lambda}\left[xf(x)\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)\right]_{x_0}^{+\infty}-\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{+\infty}dx\;\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)\{f(x)+xf'(x)\}.$$

$$\tilde{W}_{\nu-l,\nu}\{f(x)\}=-\frac{x_0f(x_0)\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x_0,x_0)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{+\infty}dx\;\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x,x_0)\{f(x)+xf'(x)\}$$

$$\Rightarrow\tilde{W}_{\nu-l,\nu}\{f(x)\}=-\frac{x_0f(x_0)\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x_0,x_0)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}W_{\nu-l,\nu}\left\{f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right\}$$

Comme : $\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x_0,x_0)=J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\frac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$

Avec la fonction puissance, cela donne :

$$W_{\nu-l,\nu}\{x^{\mu-1}\}=\frac{2}{\pi\lambda^{\mu+1}}\left\{(\mu+\nu-l-1)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu-1,\nu-l-1}(\lambda x_0)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu,\nu-l}(\lambda x_0)\right\}$$

$$\tilde{W}_{\nu-l,\nu}\{x^\mu\}=-\frac{x_0^{\mu+1}\Psi_{\nu-l,\nu}(\lambda,x_0,x_0)}{\lambda}-\frac{\mu+1}{\lambda}W_{\nu-l,\nu}\{x^{\mu-1}\}$$

$$\tilde{W}_{\nu-l,\nu}\{x^\mu\}=\frac{2x_0^{\mu}}{\pi\lambda^2}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)-\frac{2(\mu+1)}{\pi\lambda^{\mu+2}}\left\{(\mu+\nu-l-1)\,R_{l-1,\nu+1-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu-1,\nu-l-1}(\lambda x_0)-R_{l,\nu-l}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)S_{\mu,\nu-l}(\lambda x_0)\right\}$$

<u>Transformation généralisée de Weber-Orr vers l'avant avec un ordre entier selon A.V.Gorshkov, 2019, « Associated Weber-Orr transform »</u>

Un article tout récent donne une formule d'inversion de la transformée de Weber-Orr vers l'avant, mais uniquement dans le cas où la transformation intégrale est construite avec un noyau dont les ordres des fonctions de Bessel sont entier. Il s'agit de l'article de 2019 de A.V.Gorshkov « Associated Weber-Orr transform » sur un décalage 1 vers l'avant. Je donne ici le résultat de l'article :

$$\nu = k-1 \quad k \in \mathbf{N} \Rightarrow \Psi_{k,k-1}(\lambda, x, x_0) = J_k(\lambda x) Y_{k-1}(\lambda x_0) - Y_k(\lambda x) J_{k-1}(\lambda x_0)$$

$$F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x\, \Psi_{k,k-1}(\lambda, x, x_0) f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(k-1){x_0}^{2(k-1)}}{x^k} \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} ds \frac{f(x)}{s^{k-1}} + \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda\, F(\lambda, x_0) \frac{\Psi_{k,k-1}(\lambda, x, x_0)}{(J_{k-1}(\lambda x_0))^2 + (Y_{k-1}(\lambda x_0))^2} & k > 1 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda\, F(\lambda, x_0) \frac{\Psi_{k,k-1}(\lambda, x, x_0)}{(J_{k-1}(\lambda x_0))^2 + (Y_{k-1}(\lambda x_0))^2} & k = 0 \quad ou \quad k = 1 \end{cases}$$

En décalant d'une unité k->k+1, il vient :

$$\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0) = J_{k+1}(\lambda x) Y_k(\lambda x_0) - Y_{k+1}(\lambda x) J_k(\lambda x_0)$$

$$F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x\, \Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0) f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k\, {x_0}^{2k}}{x^{k+1}} \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} ds \frac{f(x)}{s^k} + \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda\, F(\lambda, x_0) \frac{\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} & k \geq 1 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda\, F(\lambda, x_0) \frac{\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} & k = -1 \quad ou \quad k = 0 \end{cases}$$

La formule est simple et a le mérite de marcher parfaitement avec la fonction puissance x^{-1-k} *:*

$$\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0) = J_{k+1}(\lambda x) Y_k(\lambda x_0) - Y_{k+1}(\lambda x) J_k(\lambda x_0)$$

$$Pour \quad k \geq 1 \quad f(x) = x^{-1-k} \Rightarrow F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} dx\, x^{-k}\, \Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0) = \frac{2}{\pi} \frac{{x_0}^{-1-k}}{\lambda^2} R_{-1,k+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) = 0$$

$$f(x)\sqrt{x} = x^{-1-k}\sqrt{x} \in L_1(x_0, +\infty) \Leftarrow \int_{x_0}^{+\infty} dx \quad x^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)} = -\frac{{x_0}^{\left(\frac{1}{2}-k\right)}}{\frac{1}{2}-k} = \frac{{x_0}^{\left(\frac{1}{2}-k\right)}}{k-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{2k\, {x_0}^{2k}}{x^{k+1}} \int_{x_0}^{+\infty} ds \frac{f(x)}{s^k} = \frac{2k\, {x_0}^{2k}}{x^{k+1}} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{s^{2k+1}} = \frac{2k\, {x_0}^{2k}}{x^{k+1}} \left[-\frac{1}{2ks^{2k}}\right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{2k\, {x_0}^{2k}}{x^{k+1} 2k{x_0}^{2k}} = \frac{1}{x^{k+1}} \quad c.q.f.d$$

$$Pour \quad k = 0 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \Psi_{1,0}(\lambda, x, x_0) = J_1(\lambda x) Y_0(\lambda x_0) - Y_1(\lambda x) J_0(\lambda x_0) \quad \int dx J_1(x) = -J_0(x)$$

$$f(x)\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \notin L_1(x_0, +\infty) \quad l'inversion\ n'est\ pas\ définie\ pour\ cette\ fonction$$

Voyons maintenant si l'on peut générer des intégrales définies à partir de cette transformation intégrale. Prenons une fonction puissance quelconque $\underline{x^{\mu}}$ *:*

$$\begin{cases} \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{k+1}(t) = \lambda x_0 \left(J_k(\lambda x_0) S_{\mu+1,k+1}(\lambda x_0) - (\mu+k+1) J_{k+1}(\lambda x_0) S_{\mu,k}(\lambda x_0) \right) \\ \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{k+1}(t) = \lambda x_0 \left(Y_k(\lambda x_0) S_{\mu+1,k+1}(\lambda x_0) - (\mu+k+1) Y_{k+1}(\lambda x_0) S_{\mu,k}(\lambda x_0) \right) \end{cases}$$

$$F(\lambda, x_0) = \left\{ Y_k(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{k+1}(t) - J_k(\lambda x_0) \int_{x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{k+1}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{1}{\lambda^{\mu+2}} \left\{ Y_k(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} J_{k+1}(t) - J_k(\lambda x_0) \int_{\lambda x_0}^{+\infty} dt\, t^{\mu+1} Y_{k+1}(t) \right\}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{\lambda x_0}{\lambda^{\mu+2}} \begin{Bmatrix} Y_k(\lambda x_0) \{ J_k(\lambda x_0) S_{\mu+1,k+1}(\lambda x_0) - (\mu+k+1) J_{k+1}(\lambda x_0) S_{\mu,k}(\lambda x_0) \} - \\ - J_k(\lambda x_0) \{ Y_k(\lambda x_0) S_{\mu+1,k+1}(\lambda x_0) - (\mu+k+1) Y_{k+1}(\lambda x_0) S_{\mu,k}(\lambda x_0) \} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = \frac{x_0 (\mu+k+1) S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \{ J_k(\lambda x_0) Y_{k+1}(\lambda x_0) - Y_k(\lambda x_0) J_{k+1}(\lambda x_0) \}$$

$$\text{Comme} \quad J_{k+1}(\lambda x_0) Y_k(\lambda x_0) - Y_{k+1}(\lambda x_0) J_k(\lambda x_0) = \frac{2}{\pi \lambda x_0} R_{0,k+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0} \right) = \frac{2}{\pi \lambda x_0}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, x_0) = -\frac{2(\mu+k+1) S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\pi \lambda^{\mu+2}}$$

Dans ces conditions l'inversion de la transformation donne l'intégrale définie suivante :

$$\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0) = J_{k+1}(\lambda x) Y_k(\lambda x_0) - Y_{k+1}(\lambda x) J_k(\lambda x_0)$$

$$F(\lambda, x_0) = -\frac{2(\mu+k+1) S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\pi \lambda^{\mu+2}}$$

$$x^{\mu} = \frac{2k\, x_0^{\;2k}}{x^{k+1}} \int_{x_0}^{+\infty} ds\, s^{\mu-k} - \frac{2(\mu+k+1)}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \frac{\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow x^{\mu} = -\frac{2k\, x_0^{\;\mu+k+1}}{x^{k+1}(\mu-k+1)} - \frac{2(\mu+k+1)}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \frac{\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}} \frac{\Psi_{k+1,k}(\lambda, x, x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2(\mu+k+1)} \left\{ x^{\mu} + \frac{2k\, x_0^{\;\mu+k+1}}{x^{k+1}(\mu-k+1)} \right\} \quad k \geq 1$$

Passons à la limite x=x0, on retrouve une intégrale définie déjà calculée en usant de transformation de Weber-Orr vers l'arrière.

$$\Psi_{k+1,k}(\lambda, x_0, x_0) = J_{k+1}(\lambda x_0) Y_k(\lambda x_0) - Y_{k+1}(\lambda x_0) J_k(\lambda x_0) = \frac{2}{\pi \lambda x_0}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+2}} \frac{x_0}{x_0^{\;\mu+2}} \frac{S_{\mu,k}(\lambda x_0)}{(J_k(\lambda x_0))^2 + (Y_k(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi}{2(\mu+k+1)} \frac{\mu-k+1+2k}{(\mu-k+1)} \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{S_{\mu,k}(\lambda)}{(J_k(\lambda))^2 + (Y_k(\lambda))^2} = -\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{(\mu+1-k)} \quad k \geq 1$$

<u>Transformation généralisée de Weber-Orr vers l'avant selon C.Nasim 1989, « Associated Weber integral transforms of arbitrary orders »</u>

<u>Élément de calcul pour preuve de la justesse du calcul réalisé par C.Nasim en 1989 dans son article : « Associated Weber integral transforms of arbitrary orders »</u>

En section 4 de cet article l'auteur entend démontrer la formule d'inversion pour l'opérateur fonctionnel W et son noyau de Weber-Orr vers l'avant, qui selon ses notations s'écrit :

$$R_{\mu,\nu}(\xi,\rho,a)=J_\mu(\xi\rho)Y_\nu(\xi a)-Y_\mu(\xi\rho)J_\nu(\xi a) \qquad W_{\nu+l,\nu}\{f\}=\int_{x_0}^{+\infty} d\rho\ \rho\, R_{\nu+l,\nu}(\xi,\rho,a)f(\rho)$$

Pour cela notamment, il introduit les opérateurs fonctionnel d'Erdélyi-Kober et leur version modifiée :

$$Erdélyi-Kober \quad I_{\eta,\alpha}\{f;x\}=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x dt\ t^{2\eta+1}\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}f(t)$$

$$Erdélyi-Kober\ modifié \quad \widetilde{I}_{\eta,\alpha}\{f;x;a\}=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x dt\ t^{2\eta+1}\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}f(t) \quad \alpha>0 \quad (voir\ formule\ 3.5)$$

$$\Rightarrow \widetilde{I}_{\frac{\nu}{2},k}\{f;\rho;a\}=\frac{2\rho^{-2\left(\frac{\nu}{2}+k\right)}}{\Gamma(k)}\int_a^\rho dt\left(\rho^2-t^2\right)^{k-1}t^{\nu+1}f(t)$$

C.Nasim introduit alors le noyau modifié par l'opérateur d'Erdélyi-Kober modifié :

$$\widetilde{R}_{\nu,\nu}(\xi,\rho,a)=\left(\frac{\rho}{2}\right)^k\widetilde{I}_{\frac{\nu}{2},k}\{R_{\nu,\nu}(\xi,t,a);\rho;a\}=\frac{2^{1-k}\rho^{-(\nu+k)}}{\Gamma(k)}\int_a^\rho dt\left(\rho^2-t^2\right)^{k-1}t^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,t,a)$$

Le noyau de la transformation de Weber-Orr possède une propriété intéressante :

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k\left\{x^\nu R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi^k x^{\nu-k}R_{\nu-k,\nu}(\xi,x,a) \quad voir\ Lemna\ 3.5$$

Pour cela différencions le noyau R, il vient :

$$\frac{d}{dx}\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\}=\xi\left(J_\mu'(\xi x)Y_\nu(\xi a)-Y_\mu'(\xi x)J_\nu(\xi a)\right)=\xi\left(\frac{\mu Y_\mu(\xi x)}{\xi x}J_\nu(\xi a)-\frac{\mu J_\mu(\xi x)}{\xi x}Y_\nu(\xi a)\right)+$$

$$+\xi\left\{J_{\mu-1}(\xi x)Y_\nu(\xi a)-Y_{\mu-1}(\xi x)J_\nu(\xi a)\right\}=\frac{\mu}{x}\left(Y_\mu(\xi x)J_\nu(\xi a)-J_\mu(\xi x)Y_\nu(\xi a)\right)+\xi R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow\left(x\frac{d}{dx}\right)\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\}=\xi x R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)-\mu R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow x^{\mu-1}\left(x\frac{d}{dx}+\mu\right)\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\}=\xi x^\mu R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left\{x^\mu R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^\mu R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left\{x^\mu R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{\mu-1}R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)$$

En appliquant l'opérateur différentiel vers l'arrière pour μ=ν on arrive à la formule du Lemna 3.5 :

$$\mu=\nu \to \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left\{x^{\nu}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{\nu-1}R_{\nu-1,\nu}(\xi,x,a)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{k}\left\{x^{\nu}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi^{k}x^{\nu-k}R_{\nu-k,\nu}(\xi,x,a).$$

On peut également construire un opérateur vers l'arrière en utilisant les formules de différentiation des fonctions de Bessel J et Y, à savoir :

$$\frac{d}{dx}J_{\mu}(\xi x)=\xi\left(\frac{\mu}{\xi x}J_{\mu}(\xi x)-J_{\mu+1}(\xi x)\right)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\frac{1}{x}\left(\mu R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)-\xi x R_{\mu+1,\nu}(\xi,x,a)\right)$$

$$\Rightarrow\left(x\frac{d}{dx}\right)\left\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\mu R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)-\xi x R_{\mu+1,\nu}(\xi,x,a)\Rightarrow x^{-\mu-1}\left(x\frac{d}{dx}-\mu\right)\left\{R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{-\mu}R_{\mu+1,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left\{x^{-\mu}R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{-(\mu+1)}R_{\mu+1,\nu}(\xi,x,a)$$

.

Cette formule de différentiation va être utilisée lors d'une intégration par partie sur le résulta essentiel de la partie 4, à savoir le calcul expression 4.5 du noyau modifié par l'opérateur d'Erdélyi-Kober modifié :

$$\widetilde{R}_{\nu,\nu}(\xi,\rho,a)=\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k}\widetilde{I}_{\frac{\nu}{2},k}\left\{R_{\nu,\nu}(\xi,x,a);\rho;a\right\}=\frac{2^{1-k}\rho^{-(\nu+k)}}{\Gamma(k)}\int_{a}^{\rho}dx\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)$$

Pour cela concentrons nous sur l'intégration partie de l'intégrale, en première étape :

$$\text{Comme}\quad\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left\{x^{\mu}R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{\mu-1}R_{\mu-1,\nu}(\xi,x,a)\to\frac{d}{dx}\left\{x^{\mu+1}R_{\mu+1,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{\mu+1}R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\mu=\nu\to\frac{d}{dx}\left\{x^{\nu+1}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow\int_{a}^{\rho}dx\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)=\frac{1}{\xi}\int_{a}^{\rho}dx\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-1}\frac{d}{dx}\left\{x^{\nu+1}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)\right\}$$

$$=\frac{1}{\xi}\left\{\left[\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)\right]_{a}^{\rho}-\int_{a}^{\rho}dx\,x^{\nu+1}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)\frac{d}{dx}\left\{\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-1}\right\}\right\}$$

$$=-\frac{\left(\rho^{2}-a^{2}\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)+\frac{2(k-1)}{\xi}\int_{a}^{\rho}dx\,x^{\nu+2}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)\left(\rho^{2}-x^{2}\right)^{k-2}$$

Réitérons pour une deuxième étape cette intégration partie cette fois sur le second membre de l'expression droite :

$$\text{Comme}\quad \frac{d}{dx}\left\{x^{\nu+2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,x,a)\right\}=\xi\,x^{\nu+2}R_{\nu+1,\nu}(\xi,x,a)$$

$$\Rightarrow\int_a^\rho dx\,\left(\rho^2-x^2\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)+\\ +\dfrac{2(k-1)}{\xi^2}\displaystyle\int_a^\rho dx\,\left(\rho^2-x^2\right)^{k-2}\frac{d}{dx}\left\{x^{\nu+2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,x,a)\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)+\dfrac{2(k-1)}{\xi^2}\left[\left(\rho^2-x^2\right)^{k-2}x^{\nu+2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,x,a)\right]_a^\rho+\\ +\dfrac{2^2(k-1)(k-2)}{\xi^2}\displaystyle\int_a^\rho dx\,x^{\nu+3}R_{\nu+2,\nu}(\xi,x,a)\left(\rho^2-x^2\right)^{k-2}\end{array}\right\}.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)-\dfrac{2(k-1)}{\xi^2}\left(\rho^2-a^2\right)^{k-2}a^{\nu+2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,a,a)+\\ +\dfrac{2^2(k-1)(k-2)}{\xi^2}\displaystyle\int_a^\rho dx\,x^{\nu+3}R_{\nu+2,\nu}(\xi,x,a)\left(\rho^2-x^2\right)^{k-2}\end{array}\right\}$$

On voit parfaitement se dessiner la récurrence jusqu'à l'itération k-1 :

$$\int_a^\rho dx\,\left(\rho^2-x^2\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)-\dfrac{2(k-1)\left(\rho^2-a^2\right)^{k-2}a^{\nu+2}}{\xi^2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,a,a)-\ldots-\\ -\dfrac{2^{k-2}(k-1)!\left(\rho^2-a^2\right)^{k-(k-1)}a^{\nu+k-1}}{(k-(k-2))!\,\xi^{k-1}}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,a,a)+\dfrac{2^{k-1}(k-1)!}{(k-(k-1))!\,\xi^{k-1}}\displaystyle\int_a^\rho dx\,x^{\nu+k}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,x,a)\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)-\dfrac{2(k-1)\left(\rho^2-a^2\right)^{k-2}a^{\nu+2}}{\xi^2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,a,a)-\ldots-\\ -\dfrac{2^{k-2}(k-1)!\left(\rho^2-a^2\right)a^{\nu+k-1}}{2!\,\xi^{k-1}}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,a,a)+\dfrac{2^{k-1}(k-1)!}{\xi^{k-1}}\displaystyle\int_a^\rho dx\,x^{\nu+k}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,x,a)\end{array}\right\}$$

$$\text{Or}\quad\int_a^\rho dx\,x^{\nu+k}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,x,a)=\frac{1}{\xi}\left[x^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,x,a)\right]_a^\rho=\frac{1}{\xi}\left\{\rho^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,\rho,a)-a^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,a,a)\right\}$$

$$\Rightarrow\int_a^\rho dx\,\left(\rho^2-x^2\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\left(\rho^2-a^2\right)^{k-1}a^{\nu+1}}{\xi}R_{\nu+1,\nu}(\xi,a,a)-\dfrac{2(k-1)\left(\rho^2-a^2\right)^{k-2}a^{\nu+2}}{\xi^2}R_{\nu+2,\nu}(\xi,a,a)-\ldots-\\ -\dfrac{2^{k-2}(k-1)!\left(\rho^2-a^2\right)a^{\nu+k-1}}{2!\,\xi^{k-1}}R_{\nu+k-1,\nu}(\xi,a,a)-\dfrac{2^{k-1}(k-1)!}{\xi^k}a^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,a,a)+\\ +\dfrac{2^{k-1}(k-1)!}{\xi^k}\rho^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,\rho,a)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\int_a^\rho dx\,\left(\rho^2-x^2\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)=-\sum_{m=1}^{m=k}\frac{2^{m-1}\left(\rho^2-a^2\right)^{k-m}a^{\nu+m}(k-1)!}{\xi^m(k-m)!}R_{\nu+m,\nu}(\xi,a,a)+\frac{2^{k-1}(k-1)!}{\xi^k}\rho^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,\rho,a)$$

D'où l'expression obtenue par C.Nasim qu'il injecte dans l'expression 4.4 qui réalise la formule d'inversion de la transformée de Weber-Orr vers l'avant avec un indice k entier :

$$\tilde{R}_{\nu,\nu}(\xi,\rho,a)=\frac{2^{1-k}\rho^{-(\nu+k)}}{\Gamma(k)}\int_a^{\rho}dx\left(\rho^2-x^2\right)^{k-1}x^{\nu+1}R_{\nu,\nu}(\xi,x,a)$$
$$=\frac{\rho^{-(\nu+k)}}{\Gamma(k)}\left\{-\sum_{m=1}^{m=k}\frac{2^{m-k}\left(\rho^2-a^2\right)^{k-m}a^{\nu+m}(k-1)!}{\xi^m(k-m)!}R_{\nu+m,\nu}(\xi,a,a)+\frac{2^{k-1}(k-1)!}{\xi^k}\rho^{\nu+k}R_{\nu+k,\nu}(\xi,\rho,a)\right\}.$$
$$=\left\{-\rho^{-(\nu+k)}\sum_{m=1}^{m=k}\frac{2^{m-k}a^{\nu+m}}{(k-m)!\,\xi^m}\left(\rho^2-a^2\right)^{k-m}R_{\nu+m,\nu}(\xi,a,a)+\frac{R_{\nu+k,\nu}(\xi,\rho,a)}{\xi^k}\right\}$$

<u>Nos notations :</u>

On revient à nos notations par la substitution :

$$a\to x_0\quad \xi\to\lambda\quad \rho\to x\quad R_{\mu,\nu}(\xi,x,a)\to\Psi_{\mu,\nu}(\lambda,x,x_0)$$
$$W_{\nu+l,\nu}\{f\}=\int_{x_0}^{+\infty}d\rho\,\rho\,R_{\nu+l,\nu}(\xi,\rho,a)f(\rho)\to F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x)$$

***<u>Résultat</u>** : donc d'après l'article de C.Nasim de 1989, « Associated Weber integral transforms of arbitrary orders », avec un noyau de Weber-Orr généralisé de la forme μ=ν+l, l'inversion de la transformation de Weber-Orr généralisé vers l'avant (formule 4.6 après substitution de mes notations) s'écrit :*

$$\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu+l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)$$
$$F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x)$$
$$f(x)=\begin{cases}-x^{-(\nu+l)}\sum_{m=1}^{m=l}\left\{\frac{2^{m-l}x_0^{\nu+m}\left(x^2-x_0^2\right)^{l-m}}{(l-m)!}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda^{1+l-m}F(\lambda,x_0)\frac{\Psi_{\nu+m,\nu}(\lambda,x_0,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\right\}+\\+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,F(\lambda,x_0)\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\end{cases}$$

L'expression peut encore se transformer un peu :

$$\text{Comme}\quad \Psi_{\nu+m,\nu}(\lambda,x_0,x_0)=J_{\nu+m}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+m}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=\frac{2}{\pi\lambda x_0}R_{m-1,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\frac{x^{-(\nu+l)}}{\pi}\sum_{m=1}^{m=l}\left\{\frac{2^{m+1-l}x_0^{\nu+m-1}\left(x^2-x_0^2\right)^{l-m}}{(l-m)!}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda^{l-m}R_{m-1,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)\frac{F(\lambda,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\right\}+\\+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,F(\lambda,x_0)\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\end{cases}$$

Le cas particulier de l=1 est le plus simple, il vient :

$$\begin{cases}\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x_0,x_0)=J_{\nu+1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{0,\nu+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}\\ \Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\\ F(\lambda,x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dx\,x\,\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x)\\ f(x)=-\dfrac{2x_0{}^{\nu}}{\pi\,x^{\nu+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\lambda\,\dfrac{F(\lambda,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\dfrac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)\end{cases}.$$

Continuons le calcul :

$$f(x)=-\frac{2x_0{}^{\nu}}{\pi\,x^{\nu+1}}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{x_0}^{+\infty}dy\,y\,\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,y,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}f(y)+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)$$

Intervertion des intégrales

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{2x_0{}^{\nu}}{\pi\,x^{\nu+1}}\int_{x_0}^{+\infty}dy\,y\,f(y)\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,y,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)$$

$$Peut-on\ calculer\quad\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,y,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{J_{\nu+1}(\lambda y)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}\quad ?$$

Si l'on fait une très grosse supposition, *alors on obtient la formule de A.V.Gorshkov (voir article de 2019 « Associated Weber-Orr Transform » généralisée à toute valeur de ν >0 :*

$$\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{J_{\nu+1}(\lambda y)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\pi\nu x_0{}^{\nu}y^{-1-\nu}\Rightarrow f(x)=\frac{2\nu\,x_0{}^{2\nu}}{x^{\nu+1}}\int_{x_0}^{+\infty}dy\,\frac{f(y)}{y^{\nu}}+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)$$

Démonstration partielle du résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{J_{\nu+1}(\lambda y)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\pi\nu x_0{}^{\nu}y^{-1-\nu}$ -

J'ai cherché un peu partout dans la littérature où je pourrais « prouver » cette assertion, et j'ai trouvé dans un article de 2009 de Z.Xinhong, T.Dengke « A generalized Weber transform and its inverse formula »une formule utilisant un parcours d'intégration sur le plan complexe qui me paraît commode (voir formule 2.1 de l'article), soit :

$$\begin{aligned}&N_\nu(\lambda,x,x_0)=J_\nu(\lambda x)\{\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)+\alpha\lambda Y_\nu{}'(\lambda x_0)\}-Y_\nu(\lambda x)\{\beta\,J_\nu(\lambda x_0)+\alpha\lambda J_\nu{}'(\lambda x_0)\}\\&D_\nu(\lambda,x_0)=\{\beta\,J_\nu(\lambda x_0)+\alpha\lambda J_\nu{}'(\lambda x_0)\}^2+\{\beta\,Y_\nu(\lambda x_0)+\alpha\lambda Y_\nu{}'(\lambda x_0)\}^2\\&\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{N_\nu(\lambda,x,x_0)}{D_\nu(\lambda x_0)}=-\frac{\pi}{2}\frac{x_0{}^{\nu+1}x^{-\nu}}{x_0\beta-\alpha\nu}\end{aligned}$$

En posant α=0 et β=1 :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}=-\frac{\pi}{2}{x_0}^{\nu}x^{-\nu}$$

En dérivant formellement cette expression par x, on retrouve l'intégrale que l'on cherche, mais c'est la où potentiellement il y a une « faiblesse » dans la démonstration, car la dérivation à l'intérieure de l'intégrale est-elle licite ? quoi qu'il en soit on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\left(\frac{\nu}{x}J_\nu(\lambda x)-\lambda J_{\nu+1}(\lambda x)\right)Y_\nu(\lambda x_0)-\left(\frac{\nu}{x}Y_\nu(\lambda x)-\lambda Y_{\nu+1}(\lambda x)\right)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}=\nu\frac{\pi}{2}{x_0}^{\nu}x^{-\nu-1}$$

$$\Rightarrow\frac{\nu}{x}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{J_\nu(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}-\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}=\nu\frac{\pi}{2}{x_0}^{\nu}x^{-\nu-1}$$

$$\Rightarrow-\frac{\pi}{2}\nu {x_0}^{\nu}x^{-\nu-1}-\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}=\nu\frac{\pi}{2}{x_0}^{\nu}x^{-\nu-1}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)}{\{J_\nu(\lambda x_0)\}^2+\{Y_\nu(\lambda x_0)\}^2}=-\nu\pi {x_0}^{\nu}x^{-\nu-1}$$

ce qui est la très grosse supposition réalisée, mais qui me paraît cohérente.

La formule de généralisée de A.V.Gorshkov marche parfaitement avec la fonction puissance $x^{-l-\nu}$ *, selon les mêmes calculs réalisé avec ν entier, mais pourvu que ν≥1 :*

$$Pour\quad \nu\geq 1\quad f(x)=x^{-1-\nu}\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{-\nu}\;\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)=\frac{2}{\pi}\frac{{x_0}^{-1-\nu}}{\lambda^2}R_{-1,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=0$$

$$Comme\quad\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{-\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}=\frac{x_0^{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}}{k-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(x)\sqrt{x}=x^{-1-\nu}\sqrt{x}\in L_1(x_0,+\infty)\Rightarrow f(x)=\frac{2k\,{x_0}^{2\nu}}{x^{\nu+1}}\int_{x_0}^{+\infty}ds\frac{f(x)}{s^\nu}=\frac{1}{x^{\nu+1}}\quad c.q.f.d$$

Calculons la transformée généralisée de Weber-Orr pour μ=ν+l pour une fonction puissance $x^{-l-\nu}$ *:*

$$\int dx\;x^{1-l-\nu}J_{\nu+l}(x)=-x^{1-l-\nu}J_{\nu+l-1}(x)\quad\int dx\;x^{1-l-\nu}Y_{\nu+l}(x)=-x^{1-l-\nu}Y_{\nu+l-1}(x)$$

$$x^{1-l-\nu}J_{\nu+l-1}(x)\propto x^{l+\frac{1}{2}-\nu}\Rightarrow Pour\;\nu>-l+\frac{1}{2}\quad\lim_{x\to+\infty}x^{1-l-\nu}J_{\nu+l-1}(x)=0$$

$$\int dx\;x^{1-l-\nu}J_{\nu+l}(\lambda x)=-\frac{x^{1-l-\nu}J_{\nu+l-1}(\lambda x)}{\lambda}\quad\int dx\;x^{1-l-\nu}Y_{\nu+l}(x)=-\frac{x^{1-l-\nu}Y_{\nu+l-1}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{1-l-\nu}\left(J_{\nu+l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{{x_0}^{1-l-\nu}}{\lambda}\left(J_{\nu+l-1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l-1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)\right)$$

Le produit croisé obtenu fait intervenir les polynômes de Lommel selon la formule suivante :

$$\text{Comme}\quad\begin{cases} J_{\nu-l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu-l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=-\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1-l}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\\ \Rightarrow J_{\nu+l}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=\dfrac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-1,\nu+1}\left(\dfrac{1}{\lambda x_0}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow J_{\nu+l-1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l-1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0)=\frac{2}{\pi\lambda x_0}R_{l-2,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$$

On peut donc écrire l'intégrale définie suivante, décliné selon différente valeur du décalage avant l :

$$\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{1-l-\nu}\left(J_{\nu+l}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+l}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{2}{\pi}\frac{x_0^{-l-\nu}}{\lambda^2}R_{l-2,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)$$

$$\text{Pour}\quad l=1\quad\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{-\nu}\left(J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=0\Leftarrow R_{-1,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=0$$

$$\text{Pour}\quad l=2\quad\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{1-\nu}\left(J_{\nu+2}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+2}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{2}{\pi}\frac{x_0^{-2-\nu}}{\lambda^2}\Leftarrow R_{0,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=1$$

$$\text{Pour}\quad l=3\quad\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{2-\nu}\left(J_{\nu+3}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+3}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\right)=\frac{4}{\pi}\frac{x_0^{-3-\nu}(\nu+1)}{\lambda^3}\Leftarrow R_{1,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right)=\frac{2(\nu+1)}{\lambda x_0}$$

De manière à tester la formule de C.Nasim ou de A.V.Gorshkov généralisée , réalisons une transformation vers l'avant d'une fonction puissance quelconque :

$$\begin{cases}\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)=J_{\nu+1}(\lambda x)Y_\nu(\lambda x_0)-Y_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda x_0)\\ F(\lambda,x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x\,\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)f(x)\\ f(x)=\dfrac{2\nu\;x_0^{2\nu}}{x^{\nu+1}}\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dy\,\frac{f(y)}{y^\nu}+\int_0^{+\infty}d\lambda\,\lambda\,\frac{\Psi_{\nu+l,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}F(\lambda,x_0)\end{cases}$$

$$\text{Condition}\quad\mu<\nu-1\to f(x)=x^\mu\Rightarrow F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{+\infty}dx\;x^{\mu+1}\,\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)=-\frac{2(\mu+\nu+1)}{\pi\lambda^{\mu+2}}S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)$$

$$\Rightarrow x^\mu=\frac{2\nu\;x_0^{2\nu}}{x^{\nu+1}}\int_{x_0}^{+\infty}dy\;y^{\mu-\nu}-\frac{2(\mu+\nu+1)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$$

$$\Rightarrow x^\mu=\frac{2\nu\;x_0^{2\nu}}{x^{\nu+1}}\left[\frac{y^{\mu-\nu+1}}{\mu-\nu+1}\right]_{x_0}^{+\infty}-\frac{2(\mu+\nu+1)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\,\frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+1}}\frac{\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda,x,x_0)}{(J_\nu(\lambda x_0))^2+(Y_\nu(\lambda x_0))^2}=-\frac{\pi}{2(\mu+\nu+1)}\left(x^\mu+\frac{2\nu}{x^{\nu+1}}\frac{x_0^{\mu+\nu+1}}{\mu-\nu+1}\right)$$

Si maintenant on passe à la limite x->x0, il vient :

$$\Psi_{\nu+1,\nu}(\lambda, x_0, x_0) = J_{\nu+1}(\lambda x_0)Y_\nu(\lambda x_0) - Y_{\nu+1}(\lambda x_0)J_\nu(\lambda x_0) = \frac{2}{\pi\lambda x_0} R_{0,\nu+1}\left(\frac{1}{\lambda x_0}\right) = \frac{2}{\pi\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{S_{\mu,\nu}(\lambda x_0)}{\lambda^{\mu+2} x_0} \frac{1}{(J_\nu(\lambda x_0))^2 + (Y_\nu(\lambda x_0))^2} = -\frac{\pi^2}{4(\mu - \nu + 1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\mu+2}} \frac{S_{\mu,\nu}(\lambda)}{(J_\nu(\lambda))^2 + (Y_\nu(\lambda))^2} = -\frac{\pi^2}{4(\mu - \nu + 1)}$$

J'ai testé numériquement cette formule, elle semble être juste !

Application des transformées de Hankel à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Dirichlet axial sur le demi-espace z>0

Si nous revenons au développement intégral de la solution du problème aux limites suivant :

$$\Delta T(r,z)=0 \quad r\in[0,\infty) \quad T(+\infty,z) \quad fini$$

$$\begin{cases} z\in[0,z_0] \quad T(r,z)\big|_{z=0}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=z_0}=f_2(r) \\ T(r,z)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)\dfrac{C(\lambda)\,Sinh(\lambda z)+D(\lambda)Sinh(\lambda(z_0-z))}{Sinh(\lambda z_0)} \end{cases} \qquad \begin{cases} z\in[0,+\infty] \quad T(r,z)\big|_{z=0}=f(r) \\ T(r,z)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}C(\lambda) \end{cases}$$

Il paraît alors assez naturel d'identifier les fonctions paramétriques d'après les transformées de Hankel respectives des fonctions limites, et d'après le théorème de Hankel, pourvu que les fonctions limites respectent les conditions requises, on écrit :

$$C(\lambda)=\int_0^{+\infty} dr\ rJ_0(\lambda r)f_2(r) \qquad D(\lambda)=\int_0^{+\infty} dr\ rJ_0(\lambda r)f_1(r) .$$

Imaginons que le problème aux limites soit sur le domaine z également non bornée, le demi espace des valeurs positives, il vient une solution de la forme

$$\Delta T(r,z)=0 \quad r\in[0,\infty) \quad z\in[0,+\infty] \quad T(+\infty,z),T(r,+\infty) \quad fini \quad T(r,z)\big|_{z=0}=f(r)$$

$$T(r,z)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)C(\lambda)\,e^{-\lambda z} \quad C(\lambda)=\int_0^{+\infty} dr\ rJ_0(\lambda r)f(r) .$$

Si la fonction limite est de la forme :

$$\begin{cases} f(r)=T_0 & r<r_0 \\ f(r)=0 & r>r_0 \end{cases} \Rightarrow C(\lambda)=T_0\int_0^{r_0} dr\ rJ_0(\lambda r) \Leftarrow \int dz\ zJ_0(z)=zJ_1(z)$$

$$C(\lambda)=\frac{T_0}{\lambda^2}\int_0^{\lambda r_0} dz\ zJ_0(z)=\frac{T_0 r_0}{\lambda}J_1(\lambda r_0)\Rightarrow T(r,z)=T_0 r_0\int_0^{+\infty} d\lambda\ J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z} .$$

Le profil de la solution sur l'axe z est alors le suivant :

$$r=0\Rightarrow T(0,z)=T_0 r_0\int_0^{+\infty} d\lambda\ J_0(0)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z} \Leftarrow J_0(0)=1\Rightarrow \frac{T(0,z)}{T_0}=r_0\int_0^{+\infty} d\lambda\, J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z} .$$

On peut calculer explicitement cette intégrale d'après l'intégrale définie donnée dans les tables de A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov et O.I.Marichev- « Integrals and Series, Volume 2 - Special Functions » page 183, section 2.12.8, formule n°3 :

$$\int_0^{+\infty} dx\, e^{-px}J_\nu(cx)=\frac{c^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^{-\nu} \quad \mathrm{Re}(p)>|\mathrm{Im}(c)| \quad \mathrm{Re}(\nu)>-1 .$$

Par identification des termes, il vient :

$$p=z \quad \nu=1 \quad c=r_0 \quad x=\lambda\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}=\frac{r_0}{\sqrt{z^2+r_0^{\,2}}}\left(z+\sqrt{z^2+r_0^{\,2}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T(0,z)}{T_0}=\frac{r_0^{\,2}}{\sqrt{z^2+r_0^{\,2}}\left(z+\sqrt{z^2+r_0^{\,2}}\right)}=\frac{r_0^{\,2}}{\left(z^2+r_0^{\,2}+z\sqrt{z^2+r_0^{\,2}}\right)} .$$

C'est exactement le profil trouvé dans le cas limite d'un cône d'angle ouvert droit en coordonnées sphérique, avec un disque de rayon fini porté à une valeur constante, l'extérieur du disque étant placé à la valeur nulle, il suffit de remplacer par l'expression :

$$\frac{T(0,z)}{T_0}=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$

$$x=\frac{z}{r_0}\Rightarrow\frac{T(0,z)}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{r_0^2}}\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{r_0^2}}+\frac{z}{r_0}\right)}=\frac{r_0^2}{\left(z^2+r_0^2+z\sqrt{z^2+r_0^2}\right)}$$

Par contre on ne peut retrouver la solution donnée dans le livre de J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, page 92, formule n°3.178, pour un disque placée à l'origine sur le plan (x,y)

$$\frac{T(r,z)}{T_0}=\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\frac{2r_0}{\sqrt{z^2+(r-r_0)^2}+\sqrt{z^2+(r+r_0)^2}}\right)\rightarrow r=0\Rightarrow\frac{T(0,z)}{T_0}=\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\frac{r_0}{\sqrt{z^2+r_0^2}}\right).$$

Ce qui est tout à fais normal car le problème aux limites du disque de J.D.Jackson est fondamentalement différent dans la nature des conditions aux limites.

Application des transformées de Hankel à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Robin axial sur le demi-espace z>0

Cette fois sur le disque de rayon r_0, la condition aux limites est inhomogène de Robin :

$$\Delta T(r,z)=0\quad r\in[0,\infty)\quad z\in[0,+\infty]\quad T(+\infty,z),T(r,+\infty)\quad fini$$

$$C.L.\quad -\alpha\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}+\beta T(r,z)\Big|_{z=0}=f(r)$$

$$T(r,z)=\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)C(\lambda)\,e^{-\lambda z}\Rightarrow\alpha\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda^2J_0(\lambda r)C(\lambda)+\beta\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)C(\lambda)=f(r)$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)(\beta+\alpha\lambda)\,C(\lambda)=f(r)\Rightarrow\begin{cases}T(r,z)=\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)C(\lambda)\,e^{-\lambda z}\\ C(\lambda)=\frac{1}{(\alpha\lambda+\beta)}\int_0^{+\infty}dr\ rJ_0(\lambda r)f(r)\end{cases}.$$

Si la fonction limite est de la forme :

$$\begin{cases}f(r)=T_0 & r<r_0\\ f(r)=0 & r>r_0\end{cases}\Rightarrow C(\lambda)=\frac{T_0}{(\alpha\lambda+\beta)}\int_0^{r_0}dr\ rJ_0(\lambda r)\Leftarrow\int dz\ zJ_0(z)=zJ_1(z)$$

$$C(\lambda)=\frac{T_0}{\lambda^2(\alpha\lambda+\beta)}\int_0^{\lambda r_0}dz\ zJ_0(z)=\frac{T_0r_0}{\lambda(\alpha\lambda+\beta)}J_1(\lambda r_0)\Rightarrow T(r,z)=T_0r_0\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\alpha\lambda+\beta}$$

Cette fois le profil sur l'axe z change de forme :

$$r=0\Rightarrow T(0,z)=T_0r_0\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{J_0(0)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\alpha\lambda+\beta}\Leftarrow J_0(0)=1\Rightarrow\frac{T(0,z)}{T_0}=r_0\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\alpha\lambda+\beta}.$$

Je n'ai pas trouvé d'intégrale définie dans le cas des deux paramètres non nuls, par contre lorsque le problème mixte est de Neumann, il existe une intégrale définie, donnée également dans les tables de A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov et O.I.Marichev- « Integrals and Series, Volume 2 - Special Functions » page 183, section 2.12.8, formule n°4 :

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^{a-1} e^{-px} J_\nu(cx) = I_\nu^a \quad I_\nu^0 = \frac{c^\nu}{\nu}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^{-\nu} \quad \mathrm{Re}(p) > |\mathrm{Im}(c)| \quad \mathrm{Re}(\nu) > -1$$

$$I_\nu^n = (-1)^{n-1} c^{-\nu} \frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}\left(\frac{\left(\sqrt{p^2+c^2}-p\right)^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}}\right)$$

$$\Rightarrow I_\nu^1 = c^{-\nu}\frac{\left(\sqrt{p^2+c^2}+p\right)^\nu\left(\sqrt{p^2+c^2}-p\right)^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^\nu} = \frac{c^{-\nu}c^{2\nu}}{\sqrt{p^2+c^2}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^\nu} = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^{-\nu}.$$

Par identification des termes à la valeur a=0, il vient :

$$p = z \quad \nu = 1 \quad c = r_0 \quad x = \lambda \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda} = \frac{r_0}{z+\sqrt{z^2+{r_0}^2}}$$

$$\frac{T(0,z)}{T_0} = \frac{r_0}{\alpha}\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{{r_0}^2}{z+\sqrt{z^2+{r_0}^2}} \to \begin{cases} \alpha = 1 \\ T_0 = 1 \Rightarrow T(0,z) = \dfrac{1}{z+\sqrt{1+z^2}} \\ r_0 = 1 \end{cases}.$$

<u>Application des transformées de Hankel/Weber à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Dirichlet axial sur une bande centrée de hauteur 2z₀</u>

Si nous revenons au développement intégral de la solution du problème aux limites suivant :

$$\Delta T(r,z) = 0 \quad r \in [r_0, \infty) \quad z \in [-z_0, z_0] \quad T(+\infty, z) \quad fini \qquad C.L.Homogène \quad T(r,z)\big|_{r=r_0} = 0$$

$$T(r,z)\big|_{z=-z_0} = f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=z_0} = f_2(r)$$

$$T(r,z) = \int_0^{+\infty} d\lambda\; \lambda\left\{\left(J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)\right)\times\frac{C(\lambda)\,Sinh(\lambda(z+z_0)) + D(\lambda)Sinh(\lambda(z_0-z))}{Sinh(2\lambda z_0)}\right\}.$$

Dans l'application des conditions aux limites et par identification des termes des transformations de Weber :

$$f(r) = \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda\,\Psi_0(\lambda r)}{(J_0(\lambda r_0))^2 + (Y_0(\lambda r_0))^2}\int_{r_0}^{+\infty} dt\, t\,\Psi_0(\lambda t) f(t) \Rightarrow \begin{cases} f(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\; \lambda\,\Psi_0(\lambda r) F(\lambda) \\ F(\lambda) = \dfrac{\displaystyle\int_{r_0}^{+\infty} dt\, t\,\Psi_0(\lambda t) f(t)}{(J_0(\lambda r_0))^2 + (Y_0(\lambda r_0))^2} \end{cases}.$$

$$\Psi_0(\lambda r) = J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)$$

$$J_0(\lambda r) \quad \text{fonction de Bessel de première espèce}$$

$$Y_0(\lambda r) \quad \text{fonction de Bessel de deuxième espèce}$$

Il vient :

$$\Delta T(r,z)=0 \quad r\in[r_0,\infty) \quad z\in[-z_0,z_0] \quad T(+\infty,z) \quad fini \qquad C.L.Homogène \quad T(r,z)\big|_{r=r_0}=0$$

$$T(r,z)\big|_{z=-z_0}=f_1(r) \quad T(r,z)\big|_{z=z_0}=f_2(r) \quad \Psi_0(\lambda r)=J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0)-Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)$$

$$f_1(r)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda\Psi_0(\lambda r)D(\lambda)\Rightarrow D(\lambda)=\frac{\int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_0(\lambda t)f_1(t)}{(J_0(\lambda r_0))^2+(Y_0(\lambda r_0))^2}$$

$$f_2(r)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda\Psi_0(\lambda r)C(\lambda)\Rightarrow C(\lambda)=\frac{\int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_0(\lambda t)f_2(t)}{(J_0(\lambda r_0))^2+(Y_0(\lambda r_0))^2}$$

.

Comme premier cas particulier, supposons que les deux fonctions limites sont identiques :

$$\Psi_0(\lambda r)=J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0)-Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0) \quad C(\lambda)=\frac{\int_{x_0}^{+\infty} dt\ t\,\Psi_0(\lambda t)f(t)}{(J_0(\lambda x_0))^2+(Y_0(\lambda x_0))^2}$$

$$T(r,z)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda C(\lambda)\Psi_0(\lambda r)\frac{Sinh(\lambda(z_0+z))+Sinh(\lambda(z_0-z))}{Sinh(2\lambda z_0)}$$

$$\Rightarrow T(r,z)=\int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda C(\lambda)\Psi_0(\lambda r)\frac{Cosh(\lambda z)}{Cosh(\lambda z_0)}$$

.

Encore plus particulièrement supposons que les fonctions sont en plus constantes, il vient :

$$\Delta T(r,z)=0 \quad r\in[r_0,\infty) \quad z\in[-z_0,z_0] \quad T(+\infty,z) \quad fini \qquad C.L.Homogène \quad T(r,z)\big|_{r=r_0}=0$$

$$T(r,z)\big|_{z=-z_0}=T_0 \quad T(r,z)\big|_{z=z_0}=T_0 \quad T(r,z)\big|_{r=r_0}=0$$

$$C(\lambda)=Y_0(\lambda r_0)\int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,J_0(\lambda t)-J_0(\lambda r_0)\int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,Y_0(\lambda t)$$

$$\int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,J_0(\lambda t)=\frac{1}{\lambda^2}\left[t\,J_1(t)\right]_{\lambda r_0}^{+\infty} \quad \int_{r_0}^{+\infty} dt\ t\,Y_0(\lambda t)=\frac{1}{\lambda^2}\left[t\,Y_1(t)\right]_{\lambda r_0}^{+\infty} \quad \lim_{t\to+\infty} t\,J_1(t)=\lim_{t\to+\infty} t\,Y_1(t)=0$$

$$C(\lambda)=-\frac{r_0}{\lambda}\{Y_0(\lambda r_0)J_1(\lambda r_0)-J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda r_0)\}=\frac{r_0}{\lambda}\{J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda r_0)-Y_0(\lambda r_0)J_1(\lambda r_0)\}$$

$$\Rightarrow T(r,z)=T_0 r_0\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{\{J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda r_0)-Y_0(\lambda r_0)J_1(\lambda r_0)\}\Psi_0(\lambda r)}{(J_0(\lambda r_0))^2+(Y_0(\lambda r_0))^2}\frac{Cosh(\lambda z)}{Cosh(\lambda z_0)}$$

De plus il existe une relation liant les fonctions de première et deuxième espèce, à savoir :

$$\Psi_0(r) = J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0) \Rightarrow \Psi_0(r_0) = 0$$

$$\Psi_0'(r) = \lambda\left(J_0'(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0'(\lambda r)J_0(\lambda r_0)\right) = -\lambda\left(J_1(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_1(\lambda r)J_0(\lambda r_0)\right)$$

$$Identit\acute{e}\ du\ Wronskien\ W_z\{J_\nu(x), Y_\nu(x)\} = \frac{2}{\pi\, x} \Leftarrow \begin{cases} J'_\nu(x) = \dfrac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \\ Y'_\nu(x) = \dfrac{\nu}{x}Y_\nu(x) - Y_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_z\{J_\nu(x), Y_\nu(x)\} = J_\nu(x)Y_\nu'(x) - J_\nu'(x)Y_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)Y_\nu(x) - J_\nu(x)Y_{\nu+1}(x)$$

$$\Rightarrow J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x) = \frac{2}{\pi\, x} \Leftrightarrow J_0(x)Y_1(x) - J_1(x)Y_0(x) = -\frac{2}{\pi\, x}$$

$$\Rightarrow \Psi_0'(r_0) = \lambda\left(J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda r_0) - J_1(\lambda r_0)Y_0(\lambda r_0)\right) = -\frac{2}{\pi\, r_0}$$

$$\Rightarrow J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda r_0) - J_1(\lambda r_0)Y_0(\lambda r_0) = -\frac{2}{\pi\,\lambda\, r_0}$$

Ce qui permet de trouver le résultat final :

$$T(r,z) = T_0\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{J_0(\lambda r_0)Y_0(\lambda r) - Y_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r)}{\lambda\left(J_0(\lambda r_0)\right)^2 + \left(Y_0(\lambda r_0)\right)^2}\frac{Cosh(\lambda\, z)}{Cosh(\lambda\, z_0)}.$$

Pour le problème suivant, le résultat découle de suite :

$$\begin{cases} \Delta T(r,z) = 0 \quad r \in [r_0, \infty) \quad z \in [-z_0, z_0] \quad T(+\infty, z) \quad fini \\ T(r,z)\big|_{z=-z_0} = 0 \quad T(r,z)\big|_{z=z_0} = 0 \quad T(r,z)\big|_{r=r_0} = T_0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = T_0 - \widetilde{T}(r,z)$$

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{T}(r,z) = 0 \quad r \in [r_0, \infty) \quad z \in [-z_0, z_0] \quad \widetilde{T}(+\infty, z) \quad fini \\ T(r,z)\big|_{z=-z_0} = T_0 \quad T(r,z)\big|_{z=z_0} = T_0 \quad T(r,z)\big|_{r=r_0} = 0 \end{cases} \qquad C.L.Homog\grave{e}ne \quad T(r,z)\big|_{r=r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \widetilde{T}(r,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{J_0(\lambda r_0)Y_0(\lambda r) - Y_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r)}{\lambda\left(J_0(\lambda r_0)\right)^2 + \left(Y_0(\lambda r_0)\right)^2}\frac{Cosh(\lambda\, z)}{Cosh(\lambda\, z_0)}$$

$$\Rightarrow T(r,z) = T_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda\ \frac{J_0(\lambda r_0)Y_0(\lambda r) - Y_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r)}{\lambda\left(J_0(\lambda r_0)\right)^2 + \left(Y_0(\lambda r_0)\right)^2}\frac{Cosh(\lambda\, z)}{Cosh(\lambda\, z_0)}\right)$$

Application des transformées de Hankel à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Dirichlet axial électrostatique dans l'espace plan de hauteur 2z₀, potentiel dû à une charge placée à l'origine des coordonnées

Dans ce cas la charge provoque un potentiel de la forme :

$$T_q(r,z) = \frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

La charge induite sur les plaques du conducteur parfait annule le potentiel sur ces derniers en z=+z0 et z=-z0. Le potentiel se décompose en deux sous la forme :

$$T(r,z) = T_q(r,z) + T_s(r,z) = \frac{T_0}{\sqrt{r^2+z^2}} + T_s(r,z).$$

Le dernier potentiel est solution du problème aux limites homogènes sur les plaques hautes et basses, à savoir :

$$\Delta T_s(r,z) = 0 \quad r\in[0,\infty) \quad z\in[-z_0,z_0] \quad T(+\infty,z) \quad fini$$

$$T_s(r,z)\Big|_{z=-z_0} = -\frac{T_0}{\sqrt{r^2+z_0{}^2}} \quad T(r,z)\Big|_{z=z_0} = -\frac{T_0}{\sqrt{r^2+z_0{}^2}} \quad C(\lambda) = -T_0\int_0^{+\infty} dr\, \frac{r\,J_0(\lambda r)}{\sqrt{t^2+z_0{}^2}}$$

$$T_s(r,z) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r)\frac{Sinh(\lambda(z_0+z)) + Sinh(\lambda(z_0-z))}{Sinh(2\lambda z_0)} \Rightarrow T_s(r,z) = \int_0^{+\infty} d\lambda\ \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r)\frac{Cosh(\lambda z)}{Cosh(\lambda z_0)}$$

$$Comme \int_0^{+\infty} dx\, e^{-px} J_\nu(cx) = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}}\left(p+\sqrt{p^2+c^2}\right)^{-\nu} \quad \mathrm{Re}(p) > |\mathrm{Im}(c)| \quad \mathrm{Re}(\nu) > -1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} dx\, e^{-px} J_0(cx) = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, e^{-z\lambda} J_0(r\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} d\lambda\, \lambda \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda} J_0(r\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$Par\ application\ du\ théorème\ de\ Hankel \Rightarrow \int_0^{+\infty} dr\, r\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} J_0(r\lambda) = \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r\,J_0(\lambda r)}{\sqrt{r^2+z_0{}^2}} = \frac{e^{-z_0\lambda}}{\lambda} \Rightarrow C(\lambda) = -T_0\frac{e^{-z_0\lambda}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow T_s(r,z) = -T_0\int_0^{+\infty} d\lambda\ e^{-z_0\lambda} J_0(\lambda r)\frac{Cosh(\lambda z)}{Cosh(\lambda z_0)} \Rightarrow T(r,z) = \frac{T_0}{\sqrt{r^2+z^2}} - T_0\int_0^{+\infty} d\lambda\ e^{-z_0\lambda} J_0(\lambda r)\frac{Cosh(\lambda z)}{Cosh(\lambda z_0)}$$

Application des transformées de Hankel à la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace : problème de Neumann axial électrostatique dans de demi espace z>0, potentiel dû à un disque de rayon r_0 posé à la terre appliquant un courant continu

Dans ce cas il s'agit d'un problème inhomogène de Neumann en z=0 :

Cette fois sur le disque de rayon r0, la condition aux limites est inhomogène de Robin :

$$\Delta T(r,z)=0 \quad r\in[0,\infty) \quad z\in[0,+\infty] \quad T(+\infty,z),T(r,+\infty) \quad fini$$

$$C.L. \quad -\left.\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=f(r)\Rightarrow\begin{cases}T(r,z)=\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda J_0(\lambda r)C(\lambda)\,e^{-\lambda z}\\ C(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}dr\ rJ_0(\lambda r)f(r)\end{cases}$$

Si la fonction limite est de la forme :

$$\begin{cases}f(r)=\dfrac{T_0}{r_0^2} & r<r_0\\ f(r)=0 & r>r_0\end{cases}\Rightarrow C(\lambda)=\frac{T_0}{\lambda r_0^2}\int_0^{r_0}dr\ rJ_0(\lambda r)\Leftarrow\int dz\ zJ_0(z)=zJ_1(z)$$

$$C(\lambda)=\frac{T_0}{\lambda r_0^2}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\lambda r_0}dz\ zJ_0(z)=\frac{T_0}{\lambda r_0^2}\frac{\lambda r_0}{\lambda^2}J_1(\lambda r_0)\Rightarrow T(r,z)=\frac{T_0 r_0}{r_0^2}\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{\lambda}{\lambda^2}J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}$$

$$\Rightarrow T(r,z)=\frac{T_0}{r_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{1}{\lambda}J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}$$

Le profil sur l'axe z change de forme :

$$\frac{T(0,z)}{T_0}=\frac{1}{r_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda}$$

L'intégrale dans les tables de A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov et O.I.Marichev- « Integrals and Series, Volume 2 - Special Functions » page 183, section 2.12.8, formule n°4 donne par identification des termes à la valeur a=0, il vient :

$$p=z \quad \nu=1 \quad c=r_0 \quad x=\lambda\Rightarrow\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda}=\frac{r_0}{z+\sqrt{z^2+r_0^2}}$$

$$\frac{T(0,z)}{T_0}=\frac{1}{r_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\frac{J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda}=\frac{1}{z+\sqrt{z^2+r_0^2}}\to\frac{1}{2z} \quad si \quad r_0\to 0$$

Regardons la répartition de potentiel dans le cas limite où r0->0 :

$$T(r,z)=\frac{T_0}{r_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\ \frac{J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)e^{-\lambda z}}{\lambda}\Leftarrow J_1(\lambda r_0)\approx\frac{\lambda r_0}{2}$$

$$\Rightarrow T(r,z)\approx\frac{T_0 r_0}{2r_0}\int_0^{+\infty}d\lambda\ J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\approx\frac{T_0}{2\sqrt{z^2+r^2}}$$

Méthode de résolution des problèmes aux limites de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques 3D sur des secteurs d'angle cylindriques non bornés par les transformations intégrales de Kontorovich-Lebedev. Problèmes de Dirichlet inhomogène angulaire sur des secteurs d'angle illimité en r, illimité ou limité en z

On aborde en quelques pages les problèmes aux limites cylindriques sur des domaines non bornés radialement et partiellement bornés sur l'axe z, en forme de secteur cylindrique, auxquels on applique des conditions aux limites inhomogènes angulaire.

La plupart des exemples donnés ci-dessous sont tirés des deux ouvrages d'exemples et d'exercices de Physique Mathématique : N.N.Lebedev, Special Functions and their applications, 1965, section 6.5 « The Dirichlet problem for the Wedge », N.N.Lebedev, I.P.Skalskaya et Y.S.Ufliand, 1965, « Problems of Mathematical Physics », section 5 « Integral Transform Involving Cylinder Functions of Imaginary order » pages 194 et suivantes. Les énoncés ont été parfois modifiés pour ne faire apparaître que la formalisation mathématique du problème aux limites de Laplace, sans se préoccuper de la forme exacte des grandeurs physiques en jeu.

Le problème de Dirichlet inhomogène angulaire est le suivant sur un solide cylindrique non borné en r et z, seules les conditions aux limites angulaire suffisent à le définir.

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^{\theta}(r,z)$$

Par la suite on définira d'autres problèmes sur des domaines non-bornés radialement avec des configurations géométriques plus complexes toujours sur des secteurs d'angle.

La séparation des variables dans les trois coordonnées cylindriques donnent trois équations différentielles ordinaires, et les solutions de chacune, notamment les solutions radiales sont alors dans la catégorie des fonctions modifiées de Bessel d'ordre purement imaginaire, et dont la partie imaginaire de l'ordre est non nécessairement entière :

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta,z)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,z)}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T(r,\theta,z)}{\partial z^2}=0 \Rightarrow T(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(\frac{\nu^2}{r^2}-\mu^2\right)R(r)=0 \quad \frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}-\nu^2\Theta(\theta)=0 \quad \frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\mu^2 Z(z)=0$$

$$\text{Solution du type}\quad R(r)=A_r J_{i\nu}(i\,\mu\,r)+B_r Y_{i\nu}(i\,\mu\,r)=A_r I_{i\nu}(\mu\,r)+B_r K_{i\nu}(\mu\,r)$$

Fonctions de Bessel modifiées d'ordre imaginaire

$$\Theta(\theta)=A_\theta Cosh(\nu\,\theta)+B_\theta Sinh(\nu\,\theta)$$

$$Z(z)=A_z Cos(\mu\,z)+B_z Sin(\mu\,z)$$

Nous savons également que les fonctions de Bessel modifiée de première et deuxième espèce présentent une singularité en zéro par une oscillation rapide qui les rend impropre a être utilisées dans des développement en série. Par ailleurs la fonction de première espèces I doit être écartée car elle divergent lorsque r tend vers l'infini. La solution de base est donc la suivante :

$$T(r,\theta,z)=K_{i\nu}(\mu\,r)\left(A_\theta Cosh(\nu\,\theta)+B_\theta Sinh(\nu\,\theta)\right)\left(A_z Cos(\mu\,z)+B_z Sin(\mu\,z)\right).$$

L'idée de Kontorovich et de son élève à l'époque N.N.Lebedev, est de tenter d'utiliser cette solution de base :

$$T(r,\theta,z) \to T_{\nu,\mu}(r,\theta,z) = K_{i\nu}(\mu\ r)(A_\theta Cosh(\nu\ \theta) + B_\theta Sinh(\nu\ \theta))(A_z Cos(\mu\ z) + B_z Sin(\mu\ z))$$

non dans une série, mais dans une intégrale sur le paramètre de valeur propre. A cet effet supposons que les fonctions limites sont paires en z, et admettent une représentation intégrale de Fourier-Cosinus :

$$f_p^\theta(r,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ g_p^\theta(r,\mu) Cos(\mu\ z) \Leftrightarrow g_p^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^\theta(r,z) Cos(\mu\ z)$$

Si la fonction est impaire alors, on utilise la transformée de Fourier sinus :

$$f_p^\theta(r,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ g_p^\theta(r,\mu) Sin(\mu\ z) \Leftrightarrow g_p^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^\theta(r,z) Sin(\mu\ z)$$

Et si la fonction n'est ni paire ni impaire, on sépare le problème en deux sous-problèmes avec respectivement les fonctions limites suivantes :

$$f_p^{+\theta}(r,z) = \frac{f_p^\theta(r,z) + f_p^\theta(r,-z)}{2} \quad f_p^{-\theta}(r,z) = \frac{f_p^\theta(r,z) - f_p^\theta(r,-z)}{2}$$

On cherche alors la solution du problème sous la forme d'une double intégrale (sur le spectre radiale et angulaire, ici prenons une fonction limite paire) :

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\ z)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r)\left[G_1(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))} + G_2(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

L'application des conditions aux limites de Dirichlet donne :

$$T(r,\theta,z)|_{\theta=\theta_1} = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\ z)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r) G_1(\nu,\mu) = \int_0^{+\infty} d\mu\ g_1^\theta(r,\mu) Cos(\mu\ z)$$

$$T(r,\theta,z)|_{\theta=\theta_2} = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\ z)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r) G_2(\nu,\mu) = \int_0^{+\infty} d\mu\ g_2^\theta(r,\mu) Cos(\mu\ z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1^\theta(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r) G_1(\nu,\mu) \\ g_2^\theta(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r) G_2(\nu,\mu) \end{cases}$$

Dès lors la solution dépend des valeurs des fonctions G1 et G2 qui sont les coefficients de l'expansion intégrale par le noyau de la fonction K d'ordre imaginaire. Cette expansion intégrale est possible grâce à une théorème dû à ses deux co-auteurs, Kontorovich et Lebedev. Le théorème permet de calculer les fonctions G1 et G2 par le biais d'un transformation intégrale (et son inverse) . La solution formelle du problème est alors la suivante (voir le théorème de la transformation intégrale) :

$$p = 1,2 \quad g_p^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^\theta(r,z) Cos(\mu\ z) \qquad G_p(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\ \nu)\int_0^{+\infty} dr\ \frac{g_p^\theta(r,\mu) K_{i\nu}(\mu\ r)}{r}$$

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\ z)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r)\left[G_1(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))} + G_2(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

<u>Théorème de Kontorovich-Lebedev avec les fonctions de Bessel modifiées d'ordre imaginaire également appelées fonctions de MacDonald</u>

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,+∞) :
1 - continue par morceau et dont la variation est bornée sur tout intervalle [x1,x2] de [0,+∞] et
2 - telle que les intégrales sont finies : $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad et \quad \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dx |f(x)| < \infty$

Cette dernière admet la représentation intégrale suivante, pour x>0 :

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} dt \ f(t) \frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} .$$

Au point de discontinuité de la fonction la formule intégrale est la suivante :

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} dt \ f(t) \frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}$$

Par le changement de variable, et le changement de fonction : $x = \mu \, r \quad t = \mu \, \rho \quad \sqrt{x} f(x) = g(\mu, r)$
La formule intégrale devient :

$$\sqrt{x} f(x) = g(\mu,r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) K_{i\nu}(\mu \, r) \int_0^{+\infty} d\rho \ f(\mu \, \rho) \sqrt{\mu \, \rho} \, \frac{K_{i\nu}(\mu \, \rho)}{\rho}$$

$$\sqrt{\mu \, \rho} f(\mu \, \rho) = g(\mu,\rho) \Rightarrow g(\mu,r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) K_{i\nu}(\mu \, r) \int_0^{+\infty} d\rho \ g(\mu,\rho) \frac{K_{i\nu}(\mu \, \rho)}{\rho}$$

En simplifiant l'expression de la fonction $g(\mu,r) \rightarrow g(r)$

$$\Rightarrow g(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) K_{i\nu}(\mu \, r) \int_0^{+\infty} d\rho \ g(\rho) \frac{K_{i\nu}(\mu \, \rho)}{\rho}$$

$$Si \ rh(r) = g(r) \Rightarrow rh(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) K_{i\nu}(\mu \, r) \int_0^{+\infty} d\rho \ h(\rho) K_{i\nu}(\mu \, \rho)$$

$$\Rightarrow h(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \ \nu \ Sinh(\pi \nu) \frac{K_{i\nu}(\mu \, r)}{r} \int_0^{+\infty} d\rho \ h(\rho) K_{i\nu}(\mu \, \rho)$$

Et les conditions de validité du développement intégral est assurée par la finitude des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{\left|\sqrt{\mu \, r} f(\mu \, r)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{\mu \, r}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{|g(\mu,r)|}{r} Log\left(\frac{1}{\mu \, r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{|g(\mu,r)|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{|g(r)|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dr |h(r)| Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dx |f(x)| = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dr \ \mu \frac{|g(\mu,r)|}{\sqrt{\mu \, r}} < \infty \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dr \frac{|g(\mu,r)|}{\sqrt{r}} < \infty \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dr \frac{|g(r)|}{\sqrt{r}} < \infty \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} dr \sqrt{r} |h(r)| < \infty$$

Les trois formules intégrales :

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}$$

$$g(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)K_{i\nu}(\mu\,r)\int_0^{+\infty}d\rho\ g(\rho)\frac{K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$h(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\frac{K_{i\nu}(\mu\,r)}{r}\int_0^{+\infty}d\rho\ h(\rho)K_{i\nu}(\mu\,\rho)$$

peuvent se décomposer afin d'introduire les diverses formes des transformées et transformées inverses de Kontorovich-Lebedev des fonction f, g, h :

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}\qquad f(x)\Leftrightarrow\tilde{f}(\nu)$$

$$\Rightarrow(1)\quad\begin{cases}\tilde{K}_f(\nu)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} & transformée\ de\ Kontorovich-Lebedev\\ \tilde{K}_{\tilde{f}}^{-1}(x)=\displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\tilde{f}(\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} & transformée\ inverse\ de\ Kontorovich-Lebedev\end{cases}$$

$$g(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)K_{i\nu}(\mu\,r)\int_0^{+\infty}d\rho\ g(\rho)\frac{K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}\qquad g(r)\Leftrightarrow\tilde{g}(\nu)$$

$$\Rightarrow(2)\quad\begin{cases}\tilde{K}_g(\nu)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{g(\rho)K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} & transformée\ de\ Kontorovich-Lebedev\\ \tilde{K}_{\tilde{g}}^{-1}(r)=\displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\tilde{g}(\nu)K_{i\nu}(\mu\,r) & transformée\ inverse\ de\ Kontorovich-Lebedev\end{cases}$$

$$h(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ \frac{Sinh(\pi\,\nu)K_{i\nu}(\mu\,r)}{r}\int_0^{+\infty}d\rho\ h(\rho)K_{i\nu}(\mu\,\rho)\qquad h(r)\Leftrightarrow\tilde{h}(\nu)$$

$$\Rightarrow(3)\quad\begin{cases}\tilde{K}_h(\nu)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\rho\ g(\rho)K_{i\nu}(\mu\,\rho) & transformée\ de\ Kontorovich-Lebedev\\ \tilde{K}_{\tilde{h}}^{-1}(x)=\displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\,\nu)\tilde{h}(\nu)\frac{K_{i\nu}(r)}{r} & transformée\ inverse\ de\ Kontorovich-Lebedev\end{cases}$$

<u>Exemple : le développement intégral de la fonction suivante, relève d'une transformation de Kontorovich-Lebedev qui permet d'associer la fonction à sa transformée :</u>

$$f(x)=\sqrt{x}e^{-xCos(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ \frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)}\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x\,e^{-xCos(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ \frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)}K_{i\nu}(x)\cdot$$

Par comparaison avec la première des formules de la transformée inverse, on en déduit ceci :

$$f(x)=\sqrt{x}\,e^{-xCos(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ \frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)}\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\widetilde{K}_{\tilde{f}}^{-1}(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\nu)\tilde{f}(\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}e^{-xCos(\alpha)}\Rightarrow\tilde{f}(\nu)=\pi\ \frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)Sinh(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ \frac{\sqrt{t}\,e^{-tCos(\alpha)}}{\sqrt{t}}K_{i\nu}(t)=\int_0^{+\infty}dt\ e^{-tCos(\alpha)}K_{i\nu}(t)=\pi\ \frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)Sinh(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ e^{-t}K_{i\nu}(t)=\pi\ \lim_{\alpha\to0}\frac{Sinh(\alpha\nu)}{Sin(\alpha)Sinh(\pi\nu)}=\frac{\pi\nu}{Sinh(\pi\nu)}$$

.

En prenant un paramètre imaginaire α->i α :

$$x\,e^{-xCosh(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ \frac{Sin(\alpha\nu)}{Sinh(\alpha)}K_{i\nu}(x)\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ e^{-tCosh(\alpha)}K_{i\nu}(t)=\pi\ \frac{Sin(\alpha\nu)}{Sinh(\alpha)Sinh(\pi\nu)}$$

Prenons le développement en intégrale de Fourier-Cosinus de la fonction de MacDonald, selon son ordre ν (<u>voir la table des transformations de Fourier de F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.20 Modified Bessel Functions of Variable Order, formule 20.5, page 100</u>), on reconnaît là une formule de transformée intégrale de Kontorovich-Lebedev, et en utilisant l'une quelconque de ses formes, il vient :

$$\frac{e^{-x\,Cosh(\alpha)}}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cos(\nu\alpha)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{K}_f(\nu)=\int_0^{+\infty}dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}\\ \widetilde{K}_{\tilde{f}}^{-1}(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\nu)\tilde{f}(\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cos(\nu\alpha)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\tilde{f}(\nu)=\frac{\pi\,Cos(\nu\alpha)}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ \frac{e^{-t\,Cosh(\alpha)}K_{i\nu}(t)}{t}=\frac{\pi\,Cos(\nu\alpha)}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}\qquad\int_0^{+\infty}dt\ \frac{e^{-t\,Cos(\alpha)}K_{i\nu}(t)}{t}=\frac{\pi\,Cosh(\nu\alpha)}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ \frac{e^{-t}K_{i\nu}(t)}{t}=\frac{\pi}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}$$

Ces traitements sont non nécessairement valide voir plus bas

Toutefois, les conditions d'application du théorème de Kontorovich-Lebedev sur la finitude des intégrales ne sont pas vérifiées dans ce cas :

$$f(x)=\frac{e^{-x\,Cosh(\alpha)}}{\sqrt{x}}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}dx\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}}Log\left(\frac{1}{x}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\frac{e^{-x\,Cosh(\alpha)}}{x}Log\left(\frac{1}{x}\right)\to\infty$$

Mais en revanche pour la première fonction, les conditions sont remplis :

$$f(x)=\sqrt{x}e^{-x\,Cosh(\alpha)}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}dx\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}}Log\left(\frac{1}{x}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\,e^{-x\,Cosh(\alpha)}Log\left(\frac{1}{x}\right)<\infty$$

De même que pour la fonction

$$f(x) = e^{-x\,Cosh(\alpha)} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \frac{e^{-x\,Cosh(\alpha)}}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) < \infty$$

Pourtant, on peut utiliser la dérivation par rapport au paramètre pour retrouver des intégrales déjà calculées auparavant :

$$\int_0^{+\infty} dt \frac{e^{-t\,Cosh(\alpha)} K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi}{\nu\, Sinh(\pi\,\nu)} Cos(\nu\alpha) \Rightarrow -Sinh(\alpha)\int_0^{+\infty} dt\; t \frac{e^{-t\,Cosh(\alpha)} K_{i\nu}(t)}{t} = -\frac{\pi\nu\; Sin(\nu\alpha)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} dt\; e^{-t\,Cosh(\alpha)} K_{i\nu}(t) = \frac{\pi\; Sin(\nu\alpha)}{Sinh(\pi\,\nu) Sinh(\alpha)}$$

$$\int_0^{+\infty} dt\; e^{-t} K_{i\nu}(t) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\pi\; Sin(\nu\alpha)}{Sinh(\pi\,\nu) Sinh(\alpha)} = \frac{\pi\,\nu}{Sinh(\pi\,\nu)}$$

.

<u>Autre exemp le : D'après l'ouvrage A.Erdelyi, H.Bateman, Higher Transcendental Functions, volume 2, page 55, formule (42)</u>

$$K_0^M\left(\sqrt{a^2+b^2-2abCos(\vartheta)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; K_{i\nu}(a) K_{i\nu}(b) Cosh(\nu(\pi-\theta))$$

En posant la valeur ϑ=π, il vient :

$$K_0^M\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab}\right) = K_0^M(a+b) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; K_{i\nu}(a) K_{i\nu}(b)$$

$$\Rightarrow K_0^M(a+x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; K_{i\nu}(a) K_{i\nu}(x)$$

En identifiant l'expression comme une transformée de Kontorovich-Lebedev, il vient en utilisant la première formule :

$$\frac{K_0^M(a+x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; K_{i\nu}(a) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{K}_f(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dt\; f(t) \frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} \\ \widetilde{K}_{\widetilde{f}}^{-1}(x) = \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\nu\; \nu\; Sinh(\pi\,\nu) \widetilde{f}(\nu) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; K_{i\nu}(a) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widetilde{f}(\nu) = \frac{\pi\, K_{i\nu}(a)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)} \Rightarrow \int_0^{+\infty} dt \frac{K_0^M(a+t) K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\, K_{i\nu}(a)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} dt \frac{K_0^M(t) K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\, K_{i\nu}(0)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

<u>*Autre exemp le : D'après l'ouvrage A.Erdelyi, H.Bateman, Higher Transcendental Functions, volume 2, page 55, formule (42)*</u>

Si on revient à la première expression :

$$K_0^M\left(\sqrt{a^2+x^2-2axCos(\vartheta)}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))K_{i\nu}(x)$$

Par identification des termes de la transformée de Kontorovich-Lebedev, il vient en utilisant la première formule :

$$\frac{K_0^M\left(\sqrt{a^2+x^2-2axCos(\vartheta)}\right)}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{K}_f(\nu)=\int_0^{+\infty}dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}\\ \widetilde{K}_{\widetilde{f}}^{-1}(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\nu)\widetilde{f}(\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\widetilde{f}(\nu)=\frac{\pi K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}\Rightarrow\int_0^{+\infty}dt\ \frac{K_0^M\left(\sqrt{a^2+t^2-2atCos(\vartheta)}\right)K_{i\nu}(t)}{t}=\frac{\pi K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}.$$

<u>*Autre exemple : démontrons la formule intégrale :*</u>

$$\int_0^{+\infty}dx\ \frac{(1-e^{-x})}{x}K_{i\nu}(x)=\pi\frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}$$

En prenant pour cela la première formule de la transformée inverse de Kontorovich-Lebedev, il vient :

$$\frac{(1-e^{-x})}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\nu)\pi\frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1}{\nu\ Sinh(\pi\nu)}\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\left(Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1\right)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\left(Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1\right)K_{i\nu}(x)\qquad Comme\quad e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(x)$$

$$Cela\ revient\ à\ démontrer\ que\quad\forall x\quad\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{i\nu}(x)=1$$

Cette dernière assertion est obtenu à l'aide de la formule intégrale (<u>voir la table des transformations de Fourier de F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.20 Modified Bessel Functions of Variable Order, formule 20.5, page 100</u>), qui donne par la substitution α->iα :

$$e^{-x\,Cosh(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cos(\nu\alpha)K_{i\nu}(x)\Rightarrow e^{-x\,Cosh(i\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cos(\nu i\alpha)K_{i\nu}(x)$$

$$\Rightarrow e^{-x\,Cos(\alpha)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cosh(\nu\alpha)K_{i\nu}(x)\qquad\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\ Cosh\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)K_{i\nu}(x)$$

Ce qui démontre l'assertion et par suite la valeur de l'intégrale à l'aide de la transformée de Kontorovich-Lebedev.

Autre exemple : démontrons la formule intégrale suivante,

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\left(1-e^{-xCosh(\alpha)}\right)}{x} K_{i\nu}(x) = \pi\, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) - Cos(\nu\alpha)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

Supposons que la formule s'écrit à l'aide de deux inconnus :

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\left(1-e^{-xCosh(\alpha)}\right)}{x} K_{i\nu}(x) = \pi\, \frac{ACosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + B}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

Nous avons alors :

$$\frac{\left(1-e^{-xCosh(\alpha)}\right)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\; \nu\; Sinh(\pi\,\nu)\pi\, \frac{ACosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + B}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)} \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \left(ACosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + B \right) \frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-xCosh(\alpha)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \left(ACosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + B \right) K_{i\nu}(x)$$

$$Comme \quad e^{-xCosh(\alpha)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; Cos(\nu\alpha) K_{i\nu}(x) \quad et \quad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu\; Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) K_{i\nu}(x)$$

$$\Rightarrow 1-e^{-xCosh(\alpha)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \left(ACosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + B \right) K_{i\nu}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \left[Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) - Cos(\nu\alpha) \right] K_{i\nu}(x)$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad et \quad B = -Cos(\nu\alpha)$$

On a donc établit les deux formules suivantes :

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\left(1-e^{-xCosh(\alpha)}\right)}{x} K_{i\nu}(x) = \pi\, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) - Cos(\nu\alpha)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\left(1-e^{-xCos(\alpha)}\right)}{x} K_{i\nu}(x) = \pi\, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) - Cosh(\nu\alpha)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

Exemple d'une transformation mixte Kontorovich-Lebedev et Mehler Fock

Dans la table sur les transformations de Kontorovich-Lebedev et Mehler-Fock *F.Oberhettinger, « Tables of Lebedev, Mehler and Generalized Mehler Transforms », la transformée suivante de Kontorovich-Lebedev nous est donnée en page 10 :*

$$\int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Tanh(\pi\nu) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha) K_{i\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\ e^{-\alpha x} \Leftrightarrow e^{-\alpha x} = \sqrt{\frac{2}{\pi\ x}}\int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Tanh(\pi\nu) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha) K_{i\nu}(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\nu)\left\{\frac{\pi^2}{2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha)}{Cosh(\pi\nu)}\right\}\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\alpha x}$$

En inversant cette intégrale vue sous la forme d'une transformation de Kontorovich-Lebedev, il vient, une représentation intégrale de la fonction conique de Mehler de première espèce :

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\ \nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} \qquad f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(\nu)$$

$$\begin{cases} \tilde{K}_f(\nu) = \int_0^{+\infty} dt\ f(t)\frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} & \text{transformée de Kontorovich} - \text{Lebedev} \\ \tilde{K}_{\tilde{f}}^{-1}(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\ \nu)\tilde{f}(\nu)\frac{K_{i\nu}(x)}{\sqrt{x}} & \text{transformée inverse de Kontorovich} - \text{Lebedev} \end{cases}$$

$$Ici \quad \tilde{f}(\nu) = \frac{\pi^2}{2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha)}{Cosh(\pi\nu)} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\alpha x} \Rightarrow \int_0^{+\infty} dt\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\alpha x}\ \frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\pi^2}{2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha)}{Cosh(\pi\nu)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\alpha) = \sqrt{2}\,\pi^{-\frac{3}{2}} Cosh(\pi\nu)\int_0^{+\infty} dt\ e^{-\alpha x}\ \frac{K_{i\nu}(t)}{\sqrt{t}}$$

Vue sous la forme d'une transformation intégrale de Mehler-Fock, il vient une représentation intégrale de la fonction de MacDonald :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\nu\ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)\,\nu\ Tanh(\pi\nu)\int_1^{+\infty} dy\ f(y) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(y) \qquad f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(\nu)$$

$$\begin{cases} \tilde{M}_f(\nu) = \tilde{f}(\nu) = \nu\ Tanh(\pi\nu)\int_1^{+\infty} dx\ f(x) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) & \text{transformée de Mehler} - \text{Fock} \\ \tilde{M}_{\tilde{f}}^{-1}(x) = f(x) = \int_0^{+\infty} d\nu\ \tilde{f}(\nu)\, P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) & \text{transformée inverse de Mehler} - \text{Fock} \end{cases}$$

$$Comme \quad \int_0^{+\infty} d\nu\ \nu\ Tanh(\pi\nu) K_{i\nu}(\alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\ e^{-\alpha x} \Rightarrow \tilde{f}(\nu) = \nu\ Tanh(\pi\nu) K_{i\nu}(\alpha) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\ e^{-\alpha x}$$

$$\Rightarrow \nu\ Tanh(\pi\nu) K_{i\nu}(\alpha) = \nu\ Tanh(\pi\nu)\int_0^{+\infty} dx\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\ e^{-\alpha x} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) \Rightarrow K_{i\nu}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} dx\ e^{-\alpha x}\sqrt{x} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)$$

Et l'on retrouve cette formule en page 23 du même ouvrage, F.Oberhettinger, « Tables of Lebedev, Mehler and Generalized Mehler Transforms », la transformée suivante de Kontorovich-Lebedev. L'examen de ces tables permet de déduire toute une série de représentation intégrale liée à la présence mixte des noyaux de ces deux transformations intégrales : Kontorovich-Lebedev et Mehler-Fock.

Revenons au problème de départ, en utilisant la deuxième formule des transformées de Kontorovich-Lebedev :

$$\begin{cases} \widetilde{K}_g(\nu) = \int_0^{+\infty} d\rho \, \dfrac{g(\rho) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} & \textit{transformée de Kontorovich} - \textit{Lebedev} \\ \widetilde{K}_{\widetilde{g}}^{-1}(r) = \dfrac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \; \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \widetilde{g}(\nu) K_{i\nu}(\mu\, r) & \textit{transformée inverse de Kontorovich} - \textit{Lebedev} \end{cases}$$

$$g_p^\theta(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\; r) \quad pour \; p = 1,2$$

$$\Rightarrow g_p^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\nu \; \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \widetilde{g}(\nu) K_{i\nu}(\mu\, r) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\; r)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2} \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \widetilde{g}(\nu) = \frac{2}{\pi^2} \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \int_0^{+\infty} d\rho \, \frac{g_p^\theta(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

La solution formelle du problème est donc :

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^\theta(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^\theta(r,z)$$

$$g_1^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \; f_1^\theta(r,z) Cos(\mu\; z) \quad g_2^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \; f_2^\theta(r,z) Cos(\mu\; z)$$

$$G_1(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2} \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \int_0^{+\infty} d\rho \, \frac{g_1^\theta(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} \quad G_2(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2} \nu \; Sinh(\pi\,\nu) \int_0^{+\infty} d\rho \, \frac{g_2^\theta(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu \; Cos(\mu\; z) \int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(\mu\; r) \left[G_1(\nu,\mu) \frac{Sinh(\nu\;(\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\;(\theta_2-\theta_1))} + G_2(\nu,\mu) \frac{Sinh(\nu\;(\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\;(\theta_2-\theta_1))} \right]$$

Il arrive souvent que les fonctions limites ne permettent pas de garantir la finitude de la première l'intégrale pour l'application du théorème de Kontorovich-Lebedev :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{\left|g_p^\theta(r,\mu)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) \to \infty .$$

Dans ce cas on régularise le problème en introduisant des fonctions modifiées :

$g_p^*(r,\mu) = g_p^\theta(r,\mu) - g_p^\theta(0,\mu)e^{-\mu r}$, *et l'on assume que les conditions de finitude de l'intégrale sur la fonction modifiée est assurée, soit :*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{\left|g_p^*(r,\mu)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty .$$

On résout alors le problème avec ces fonctions modifiées :

$$g_p^*(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p^*(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\, r) \qquad G_p^*(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\nu \; Sinh(\pi\,\nu) \int_0^{+\infty} d\rho \; \frac{g_p^*(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} .$$

Il existe un développement connu de la fonction exponentielle en fonction de MacDonald :

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(x)$$

Pour le prouver on utilise la transformée de Fourier-Cosinus sur un ordre variable de la fonction de MacDonald :

$$e^{-x\,Cosh(\alpha)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \; Cos(\nu\alpha) K_{i\nu}(x) \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(x)$$

Ce qui implique :

$$g_p^\theta(0,\mu)e^{-\mu r} = \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) \int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(\mu\, r)$$

Ce qui permet de revenir facilement aux termes G, de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} g_p^*(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p^*(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\, r) \\ g_p^\theta(r,\mu) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\, r) \end{array}\right\}$$

$$g_p^\theta(0,\mu)e^{-\mu r} = \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) \int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(\mu\, r)$$

$$g_p^*(r,\mu) = g_p^\theta(r,\mu) - g_p^\theta(0,\mu)e^{-\mu r} = g_p^\theta(r,\mu) - \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) \int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(\mu\, r)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p^*(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\, r) = \int_0^{+\infty} d\nu \; G_p(\nu,\mu) K_{i\nu}(\mu\, r) - \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) \int_0^{+\infty} d\nu \; K_{i\nu}(\mu\, r)$$

$$\Rightarrow G_p^*(\nu,\mu) = G_p(\nu,\mu) - \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) \Rightarrow G_p(\nu,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) + \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) .$$

La solution dans ce cas s'écrit maintenant :

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^{\theta}(r,z)$$

$$g_p^{\theta}(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^{\theta}(r,z) Cos(\mu\ z) \Rightarrow g_p^{\theta}(0,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^{\theta}(0,z) Cos(\mu\ z)$$

$$g_p^{*}(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty} dz\ f_p^{\theta}(r,z) Cos(\mu\ z) - e^{-\mu\ r}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^{\theta}(0,z) Cos(\mu\ z)\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ \left(f_p^{\theta}(r,z) - e^{-\mu\ r} f_p^{\theta}(0,z)\right) Cos(\mu\ z)$$

$$tel\ que \int_0^{\frac{1}{2}} dr\ \frac{\left|g_p^{*}(r,\mu)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty \quad p = 1, 2$$

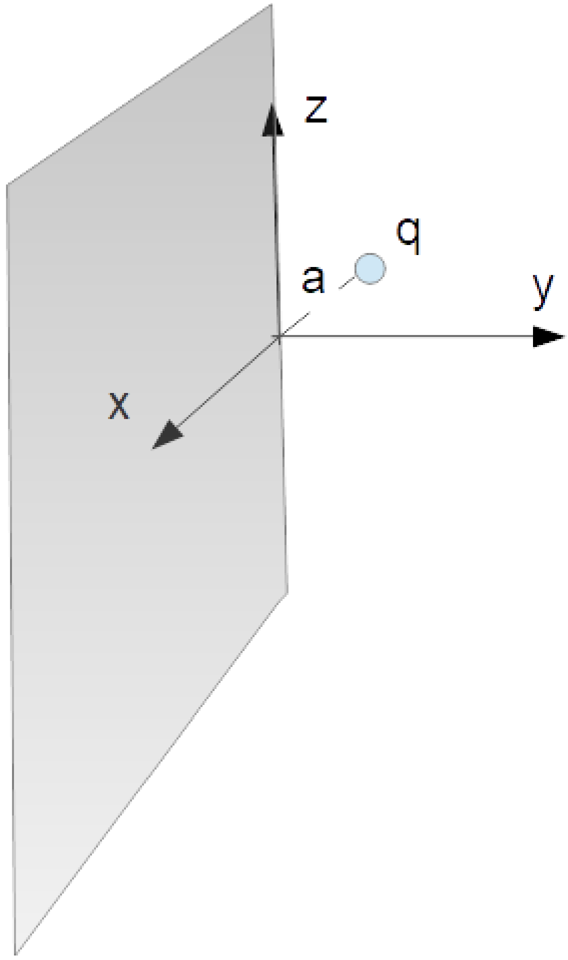
$$G_p^{*}(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\ \nu)\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{g_p^{*}(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\ \rho)}{\rho} \quad et \quad G_p(\nu,\mu) = G_p^{*}(\nu,\mu) + \frac{2}{\pi} g_p^{\theta}(0,\mu)$$

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\ z)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu\ r)\left[G_1(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))} + G_2(\nu,\mu)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

.

Exemple : potentiel d'une charge q, placée devant un demi-plan conducteur à une distance a de l'origine.

Le demi-plan conducteur parfait est dans le plan <x,o,z>, le bord du plan coïncide avec l'axe z.
On suppose que la charge est dans le même plan <x,o,z>, placé à la distance a de l'origine, soit en coordonnées cartésiennes q placé en (-a,0,0).



Le potentiel crée par la charge q est le suivant :

$$T_q(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{\sqrt{x^2+a^2+2ax+y^2+z^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=r\,Cos(\theta)\\ r=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\}\Rightarrow T_q(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}}.$$

La solution est recherchée sous la forme d'une addition du potentiel crée par la charge q et d'un potentiel recherché :

$$T(r,\theta,z)=T_q(r,\theta,z)+T_0(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}}+T_0(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=0}=0 \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi}=0.$$

Le potentiel $T_0(r,\theta,z)$ répond alors au condition aux limites suivante :

$$T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=0} = T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi} = f_p^{\theta}(r,z) = -\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar+z^2}} = -\frac{q}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}.$$

La transformée de Fourier-Cosinus de la fonction limite est la suivante (<u>voir la table des transformations de Fourier de F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.1 Algebraic Function, formule 1.32, page 5</u>):

$$g_p^{\theta}(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\,\frac{Cos(\mu\, z)}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}} = -\frac{2q}{\pi} K_0^M(\mu(r+a))$$

$$K_0^M(x) \quad fonction\ de\ MacDonald \quad K_0^M(x) = \underset{\nu\to 0}{Lim}\, K_{i\nu}(x)$$

$$K_\nu^M(x) = K_{i\nu}(x).$$

Dans ce cas la valeur en r=0 est la suivante :

$$g_p^{\theta}(0,\mu) = -\frac{2q}{\pi} K_0^M(\mu\, a).$$

Et la fonction modifiée est la suivante :

$$g_p^{*}(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi} K_0^M(\mu(r+a)) + \frac{2q}{\pi} e^{-\mu r} K_0^M(\mu\, a)$$

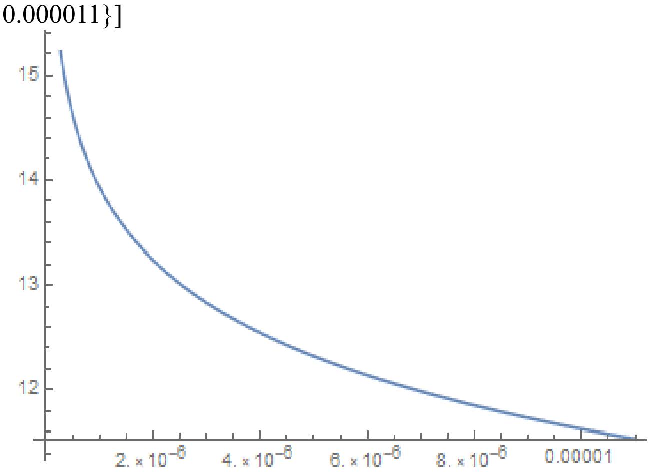
$$g_p^{*}(r,\mu) = \frac{2q}{\pi}\left(-K_0^M(\mu(r+a)) + e^{-\mu r} K_0^M(\mu\, a)\right).$$

Posons nous la question : est-ce que l'intégrale suivante est finie :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dr\,\frac{\left|g_p^{\theta}(r,\mu)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) \propto \frac{2q}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} dr\,\frac{K_0^M(\mu(r+a))}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right)$$

En utilisant par exemple Mathematica, on se convainc facilement que cette intégrale diverge :

```
Clear[MacDonald];
MacDonald[0,x_]:=Limit[Re[BesselK[I ν,x]],ν->0];
Plot[MacDonald[0, x], {x, 0, 0.000011}]
```




```
mu = 0.5; a = 2;
Clear[IntMacDonald];
IntMacDonald[ε_] := NIntegrate[MacDonald[0, mu (x + a)]/x Log[1/x], {x,ε], 0.5}];
```

Print[IntMacDonald[0]] ; donne $4.73288*10^9$

Posons nous maintenant la seconde question : est-ce que l'intégrale suivante est finie :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{\left|g_p^*(r,\mu)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) \propto \frac{2q}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{\left(-K_0^M(\mu(r+a)) + e^{-\mu r} K_0^M(\mu\, a)\right)}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right)$$

Avec le code Mathematica suivant :

```
mu = 0.5;
a = 2;
Clear[IntMacDonaldModified];
IntMacDonaldModified[ε_]:=NIntegrate[(MacDonald[0,mu (x+a)]-Exp[-mu x] MacDonald[0,mu a])/x Log[1/x], {x, ε, 0.5}];
IntMacDonaldModified[0]=-0.0667506
```

Ces deux résultats justifient donc pleinement la régularisation opérée par modification de la transformée de Fourier-cosinus de la fonction limite.

Le coefficient G se calcule donc comme suit :

$$G_p^*(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\nu\; Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\, \frac{g_p^*(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$\Rightarrow G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^3}\nu\; Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\, \frac{\left(K_0^M(\mu(\rho+a)) - e^{-\mu\,\rho}K_0^M(\mu\,a)\right)K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}.$$

L'évaluation de l'intégrale est assez compliquée, faisant appel à plusieurs formules plus ou moins connue sur les intégrales définies des fonctions de MacDonald :

$$I = \int_0^{+\infty} d\rho\, \frac{\left(K_0^M(\mu(\rho+a)) - e^{-\mu\,\rho}K_0^M(\mu\,a)\right)K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$x = \mu\,\rho \Rightarrow I = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\left(K_0^M(x+\mu\,a) - e^{-x}K_0^M(\mu\,a)\right)K_{i\nu}(x)}{x}$$

$$I = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{K_0^M(x+\mu\,a)K_{i\nu}(x)}{x} - K_0^M(\mu\,a)\int_0^{+\infty} dx\, \frac{e^{-x}K_{i\nu}(x)}{x}$$

Nous avons établit avec les quelques exemples données de transformations de Kontorovich-Lebedev que l'intégrale suivante s'évaluait comme suit :

$$\int_0^{+\infty} dt\, \frac{K_0^M(a+t)K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\, K_{i\nu}(a)}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}$$

Il vient donc :

$$\int_0^{+\infty} dt\, \frac{e^{-t}K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)} \quad De\ même \int_0^{+\infty} dx\, \frac{K_0^M(x+\mu\,a)K_{i\nu}(x)}{x} = \frac{\pi}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}K_{i\nu}(\mu\,a)$$

$$I = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{K_0^M(x+\mu\,a)K_{i\nu}(x)}{x} - K_0^M(\mu\,a)\int_0^{+\infty} dx\, \frac{e^{-x}K_{i\nu}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}\left(K_{i\nu}(\mu\,a) - K_0^M(\mu\,a)\right)$$

$$\Rightarrow G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^3}\nu\; Sinh(\pi\,\nu) I = -\frac{4q}{\pi^3}\nu\; Sinh(\pi\,\nu)\frac{\pi}{\nu\; Sinh(\pi\,\nu)}\left(K_{i\nu}(\mu\,a) - K_0^M(\mu\,a)\right).$$

Le résultat du calcul littéral de l'intégrale donne donc :

$$G_p^*(\nu,\mu)=\frac{4q}{\pi^2}\left[K_0^M(\mu\, a)-K_{i\nu}(\mu\, a)\right]$$

$$G_p(\nu,\mu)=G_p^*(\nu,\mu)+\frac{2}{\pi}g_p^\theta(0,\mu)=G_p^*(\nu,\mu)-\frac{4q}{\pi^2}K_0^M(\mu\, a)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu)=-\frac{4q}{\pi^2}K_{i\nu}(\mu\, a)$$

Ce qui donne la solution du problème :

$$T_0(r,\theta,z)=-\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\nu\, K_{i\nu}(\mu\, r)\frac{K_{i\nu}(\mu\, a)}{Sinh(2\pi\,\nu)}\left[Sinh(\nu\,(2\pi-\theta))+Sinh(\nu\,\theta)\right]$$

$$T_0(r,\theta,z)=-\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\nu\, K_{i\nu}(\mu\, r)\frac{K_{i\nu}(\mu\, a)}{2Sinh(\pi\,\nu)Cosh(\pi\,\nu)}\left[Sinh(\nu\,(2\pi-\theta))+Sinh(\nu\,\theta)\right]$$

$$a=\nu(\pi-\theta)\quad b=\pi\,\nu$$

$$Sinh(\nu\,(2\pi-\theta))+Sinh(\nu\,\theta)=Sinh(b+a)+Sinh(b-a)=2Sinh(b)Cosh(a)$$

$$=2Sinh(\pi\,\nu)Cosh(\nu(\pi-\theta))$$

$$T_0(r,\theta,z)=-\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)}K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, a)$$

.

On pourrait utiliser cette formule: $K_0^M(\mu(r+a))=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\, K_{i\nu}(\mu\, a)K_{i\nu}(\mu\, r)$

Ainsi qu'il est établit dans l'ouvrage A.Erdelyi, H.Bateman, Higher Transcendental Functions, volume 2, page 55, formule (42) mettre la valeur ϑ=π.

$$K_0^M\left(\sqrt{a^2+b^2-2abCos(\vartheta)}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}d\nu\, K_{i\nu}(a)K_{i\nu}(b)Cosh(\nu(\pi-\theta))$$

.

Mais en fait on a mieux à faire, en intervertissant les intégrations de la solution :

$$T_0(r,\theta,z)=-\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)}K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, a)$$

$$=-\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)}\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, a)$$

.

Regardons maintenant la transformée de Fourier-Cosinus du produit des fonctions de MacDonald, et l'on trouve dans <u>la table des transformations de Fourier de F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.17 Modified Bessel Functions of Arguments x, x^2 and 1/x, formule 17.23, page 90</u>), la formule suivante :

$$(17.23)\quad\int_0^{+\infty}dx\, Cos(x\, y)K_\nu(a\, x)K_\nu(b\, y)=\frac{\pi^2}{4Cos(\pi\,\nu)\sqrt{a\,b}}P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+b^2+y^2}{2a\,b}\right)$$

$$\nu\to i\nu\quad x\to\mu\quad b\to r\quad y\to z\quad a\to a$$

$$\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)K_{i\nu}(\mu\, a)K_{i\nu}(\mu\, r)=\frac{\pi^2}{4Cosh(\pi\,\nu)\sqrt{a\, r}}P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right)$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)} \int_0^{+\infty} d\mu \, Cos(\mu\, z) K_{i\nu}(\mu\, r) K_{i\nu}(\mu\, a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{\sqrt{a\,r}}\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}\right)$$

.

Maintenant c'est là où les coïncidences font bien les choses, dans la section du présent document dédié aux coordonnées toroïdales, dans l'exemple : « solution du problème de Dirichlet sur le domaine extérieur d'une coupole ou coquille sphérique », on a démontré une formule extrêmement importante donnée dans l'ouvrage en russe « A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions» en page 181 formule 2.17.24.6 (mais la formule contient une légère erreur dans le deuxième terme à droite qui est corrigée dans ce qui suit), et que nous avons également démontré quelques pages plus loin :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{c-Cos(b)}}\left(\frac{\pi}{2} - Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)}{\sqrt{c-Cos(b)}}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+c}}\right)}{\sqrt{c-Cos(b)}}$$

Appliquons cette formule à notre cas, *il vient :*

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right)$$

$$\tau \to \nu \quad b \to \pi-\theta \quad c \to \frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r} \quad Cos(\pi-\theta) = -Cos(\theta)$$

$$\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}+Cos(\theta)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}+Cos(\theta)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2a\,r}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{2a\,r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a\,r}}{\sqrt{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{2a\,r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\right)\right)$$

.

et *la solution devient, après ces divers calculs :*

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{\sqrt{a\,r}}\,\frac{\sqrt{a\,r}}{\sqrt{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\left(1-\frac{2}{\pi}\,Arctan\left(\sqrt{2a\,r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\right)\right)$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{\sqrt{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\left(1-\frac{2}{\pi}\,Arctan\left(\sqrt{2a\,r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}\right)\right)$$

$$Or\ 2(1-Cos(\theta)) = 4Sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

.

Et oh ! Miracle, le résultat final s'exprime d'une manière plutôt simple :

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2arCos(\vartheta)+z^2}}\left(1-\frac{2}{\pi}\,Arctan\left(\frac{2\sqrt{ar}\,Sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{r^2+a^2+2arCos(\vartheta)+z^2}}\right)\right)$$

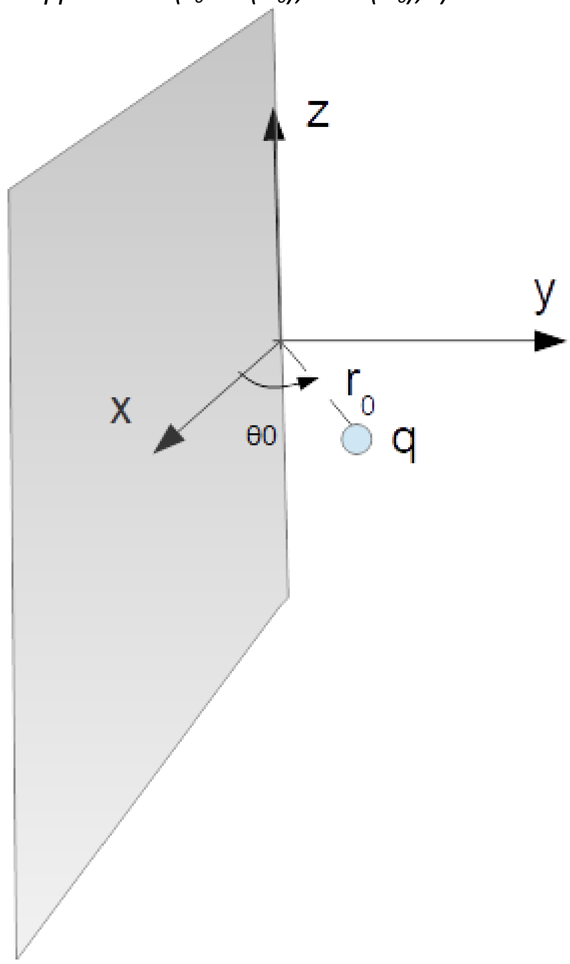
$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2arCos(\vartheta)+z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{2q}{\pi\sqrt{r^2+a^2+2arCos(\vartheta)+z^2}}\,Arctan\left(\frac{2\sqrt{ar}\,Sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{r^2+a^2+2arCos(\vartheta)+z^2}}\right)$$

.

Exemple : potentiel d'une charge q, placée devant un demi-plan conducteur dans le plan <x,o,z> à un point quelconque dans le plan <x,o,y> externe au conducteur, aux coordonnées polaire $r=r_0$ et $\vartheta=\vartheta_0$

Le demi-plan conducteur parfait est dans le plan <x,o,z>, le bord du plan coïncide avec l'axe z. On suppose que la charge est dans le plan <x,o,y>, placée à la distance r_0 de l'origine et d'angle ϑ_0, soit en coordonnées cartésiennes q placé en $(r_0Cos(\vartheta_0),r0Sin(\vartheta_0),0)$.



Le potentiel crée par la charge q est le suivant :

$$\text{Position de } q\ (r_0 Cos(\theta_0), r_0 Sin(\theta_0), 0)$$

$$T_q(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{(x-r_0Cos(\theta_0))^2+(y-r_0Sin(\theta_0))^2+z^2}}=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+r_0^{\,2}-2r_0(xCos(\theta_0)+ySin(\theta_0))+z^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=r\,Cos(\theta)\\ y=r\,Sin(\theta)\\ r=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\}\Rightarrow T_q(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0(Cos(\theta)Cos(\theta_0)+Sin(\theta)Sin(\theta_0))+z^2}}$$

$$\Rightarrow T_q(r,\theta,z)=\frac{q}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}}$$

La solution est recherchée sous la forme d'une addition du potentiel créé par la charge q et d'un potentiel recherché :

$$T(r,\theta,z) = T_q(r,\theta,z) + T_0(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta-\theta_0) + z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=0} = 0 \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi} = 0$$

.

Le potentiel $T_0(r,\theta,z)$ répond alors au condition aux limites suivantes :

$$T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=0} = T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi} = f_p^\theta(r,z) = -\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta_0) + z^2}}$$

.

La transformée de Fourier-Cosinus de la fonction limite est la suivante (voir la table des transformations de Fourier de F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.1 Algebraic Function, formule 1.32, page 5):

$$g_p^\theta(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\,\frac{Cos(\mu\,z)}{\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta_0) + z^2}} = -\frac{2q}{\pi} K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta_0)}\right)$$

$$K_0^M(x) \quad fonction\ de\ MacDonald \quad K_0^M(x) = \lim_{\nu\to 0} K_{i\nu}(x) \qquad K_\nu^M(x) = K_{i\nu}(x)$$

.

Dans ce cas la valeur en r=0 est la suivante :

$$g_p^\theta(0,\mu) = -\frac{2q}{\pi} K_0^M(\mu\,r_0)$$

.

Et la fonction modifiée est la suivante :

$$g_p^*(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi} K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) + \frac{2q}{\pi} e^{-\mu\,r} K_0^M(\mu\,r_0)$$

$$g_p^*(r,\mu) = \frac{2q}{\pi}\left(-K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2 + r_0{}^2 - 2r\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) + e^{-\mu\,r} K_0^M(\mu\,r_0)\right)$$

.

Le coefficient G se calcule donc comme suit :

$$G_p^*(\nu,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{g_p^*(\rho,\mu) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$\Rightarrow G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^3}\nu\ Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(K_0^M\left(\mu\sqrt{\rho^2 + r_0{}^2 - 2\rho\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) - e^{-\mu\,\rho} K_0^M(\mu\,r_0)\right) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho}$$

$$\int_0^{+\infty} dt\,\frac{e^{-t} K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi}{\nu\ Sinh(\pi\,\nu)} \Rightarrow K_0^M(\mu\,r_0)\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{e^{-\mu\,\rho} K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} = K_0^M(\mu\,r_0)\frac{\pi}{\nu\ Sinh(\pi\,\nu)}$$

$$\Rightarrow G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}\left[\frac{\nu\ Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{K_0^M\left(\mu\sqrt{\rho^2 + r_0{}^2 - 2\rho\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} - K_0^M(\mu\,r_0)\right]$$

$$\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{K_0^M\left(\sqrt{\mu^2\rho^2 + \mu^2 r_0{}^2 - 2\mu\,\rho\,\mu\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) K_{i\nu}(\mu\,\rho)}{\rho} = \int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{K_0^M\left(\sqrt{\rho^2 + \mu^2 r_0{}^2 - 2\rho\,\mu\,r_0 Cos(\theta_0)}\right) K_{i\nu}(\rho)}{\rho}$$

.

Nous avons établi dans les quelques exemples des transformées de Kontorovich-Lebedev :
Comme

$$\int_0^{+\infty} dt\, \frac{K_0^M\left(\sqrt{a^2+t^2-2atCos(\vartheta)}\right)K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\, K_{i\nu}(a)Cosh(\nu(\pi-\theta))}{\nu\, Sinh(\pi\,\nu)} \qquad \rho \to t$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} dt\, \frac{K_0^M\left(\sqrt{t^2+\mu^2\, {r_0}^2-2t\,\mu\, r_0 Cos(\theta_0)}\right)K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\, K_{i\nu}(\mu\, r_0)Cosh(\nu(\pi-\theta_0))}{\nu\, Sinh(\pi\,\nu)}.$$

Le résultat du calcul littéral de l'intégrale donne donc :

$$G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}\left[K_{i\nu}(\mu\, r_0)Cosh(\nu(\pi-\theta_0)) - K_0^M(\mu\, r_0)\right]$$

$$G_p(\nu,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) + \frac{2}{\pi} g_p^\theta(0,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) - \frac{4q}{\pi^2} K_0^M(\mu\, r_0)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2} K_{i\nu}(\mu\, r_0)Cosh(\nu(\pi-\theta_0))$$

Ce qui donne la solution du problème :

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty} d\nu\, K_{i\nu}(\mu\, r)\frac{K_{i\nu}(\mu\, r_0)Cosh(\nu(\pi-\theta_0))}{Sinh(2\pi\,\nu)}\left[Sinh(\nu\,(2\pi-\theta)) + Sinh(\nu\,\theta)\right]$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty} d\nu\, K_{i\nu}(\mu\, r)\frac{K_{i\nu}(\mu\, r_0)Cosh(\nu(\pi-\theta_0))}{2Sinh(\pi\,\nu)Cosh(\pi\,\nu)}\left[Sinh(\nu\,(2\pi-\theta)) + Sinh(\nu\,\theta)\right]$$

$$a = \nu(\pi-\theta) \quad b = \pi\,\nu$$

$$Sinh(\nu\,(2\pi-\theta)) + Sinh(\nu\,\theta) = Sinh(b+a) + Sinh(b-a) = 2Sinh(b)Cosh(a)$$

$$= 2Sinh(\pi\,\nu)Cosh(\nu(\pi-\theta))$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))Cosh(\nu(\pi-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\nu)} K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, r_0)$$

$$Cosh(\nu(\pi-\theta))Cosh(\nu(\pi-\theta_0)) = \frac{Cosh(\nu(2\pi-\theta-\theta_0)) + Cosh(\nu(\theta-\theta_0))}{2}$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(2\pi-\theta-\theta_0)) + Cosh(\nu(\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\nu)} K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, r_0).$$

<u>A l'aide de la formule suivante dans F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.17 Modified Bessel Functions of Arguments x, x^2 and 1/x, formule 17.23, page 90)</u> :

$$\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)K_{i\nu}(\mu\, r_0)K_{i\nu}(\mu\, r) = \frac{\pi^2}{4Cosh(\pi\,\nu)\sqrt{r_0\, r}} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{{r_0}^2+r^2+z^2}{2r_0\, r}\right).$$

Il vient

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(2\pi-\theta-\theta_0)) + Cosh(\nu(\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\nu)}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z)K_{i\nu}(\mu\, r)K_{i\nu}(\mu\, r_0)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{2\sqrt{r_0\, r}}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(2\pi-\theta-\theta_0)) + Cosh(\nu(\theta-\theta_0))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{{r_0}^2+r^2+z^2}{2r_0\, r}\right).$$

La formule suivante dans « A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions» en page 181 formule 2.17.24.6 (attention erreur corrigée dans le présent document), donne dans notre cas :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c - Cos(b)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c - Cos(b)}}\right)\right)$$

$$\tau \to \nu \quad b \to 2\pi - \theta - \theta_0 \quad c \to \frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r} \quad Cos(2\pi - \theta - \theta_0) = Cos(\theta + \theta_0)$$

$$\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh(\nu(2\pi - \theta - \theta_0))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r} - Cos(\theta + \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta + \theta_0)}{\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r} - Cos(\theta + \theta_0)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2 r_0\, r}}{\sqrt{2}\sqrt{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta + \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{2 r_0\, r}\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta + \theta_0)}{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta + \theta_0)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{r_0\, r}}{\sqrt{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta + \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{2 r_0\, r}\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta + \theta_0)}{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta + \theta_0)}}\right)\right)$$

$$\tau \to \nu \quad b \to \theta - \theta_0 \quad c \to \frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r}$$

$$\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh(\nu(\theta - \theta_0))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r} - Cos(\theta - \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta - \theta_0)}{\frac{{r_0}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r} - Cos(\theta - \theta_0)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2 r_0\, r}}{\sqrt{2}\sqrt{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta - \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{2 r_0\, r}\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta - \theta_0)}{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta - \theta_0)}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{r_0\, r}}{\sqrt{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta - \theta_0)}}\left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{2 r_0\, r}\sqrt{\frac{1 + Cos(\theta - \theta_0)}{{r_0}^2 + r^2 + z^2 - 2 r_0\, r Cos(\theta - \theta_0)}}\right)\right)$$

Et *la solution devient, après ces divers calculs :*

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{2\sqrt{r_0\, r}} \int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(2\pi-\theta-\theta_0)) +}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{r_0^{\,2}+r^2+z^2}{2r_0\, r}\right)$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{r_0\, r}} \int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(\theta-\theta_0))}{Cosh^2(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{r_0^{\,2}+r^2+z^2}{2r_0\, r}\right)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{2\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta+\theta_0)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta+\theta_0)}}\right)\right)$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta-\theta_0)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta-\theta_0)}}\right)\right)$$

Le résultat final s'exprime ainsi :

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\, r_0 Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{2\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\, r_0 Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} - \frac{q}{2\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta+\theta_0)}}$$

$$+\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta+\theta_0)}} Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta+\theta_0)}}\right)$$

$$+\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta-\theta_0)}} Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\, rCos(\theta-\theta_0)}}\right).$$

En posant $\theta_0=\pi$, on retrouve bien la formule de l'exemple précédent :

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\, r_0 Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$\theta_0 = \pi \Rightarrow Cos(\theta-\pi) = Cos(\theta+\pi) = -Cos(\theta)$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{2\sqrt{r^2+r_0^{\,2}+2r\, r_0 Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{2\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}}$$

$$+\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}} Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}}\right)$$

$$+\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}} Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{2q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}} Arctan\left(\sqrt{2r_0\, r}\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2+2r\, r_0 Cos(\theta)}}\right)$$

On peut écrire aussi la solution sous cette forme :

$$T(r,\theta,z)=\frac{q}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}}\left(\frac{\pi}{2}+Arctan\left(\sqrt{2r_0\,r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\,rCos(\theta-\theta_0)}}\right)\right)+$$

$$-\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\sqrt{2r_0\,r}\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r_0\,rCos(\theta+\theta_0)}}\right)\right)$$

$$Pour\ x>0\quad Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\quad et\quad posons\quad Cosh(\alpha)=\frac{r_0^{\,2}+r^2+z^2}{2r_0\,r}$$

$$T(r,\theta,z)=\frac{q}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}}\left(\frac{\pi}{2}+Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}}\right)\right)+$$

$$-\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}}\right)\right)$$

ou bien

$$T(r,\theta,z)=\frac{q}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}}\left(\frac{\pi}{2}+Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}}\right)\right)+$$

$$-\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}Arctan\left(\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}{1+Cos(\theta+\theta_0)}}\right)$$

On va tenter de retrouver la formule donnée dans l'ouvrage N.N.Lebedev, I.P.Skalskaya et Y.S.Ufliand, 1965, « Problems of Mathematical Physics », exercice 422, page 198. Pour cela introduisons les expressions suivantes :

$$\text{Sachant que pour } x>0 \quad Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2} \quad et \quad 2Arctan(x)=Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$x_2=\sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}\Rightarrow\frac{2x_2}{1-x_2^2}=\left\{2\sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}\right\}\Bigg/\left\{1-\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{2x_2}{1-x_2^2}=\frac{2\left(Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)\right)\sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)-\left(Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{2x_2}{1-x_2^2}=\frac{\sqrt{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}\sqrt{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}{Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{2x_2}{1-x_2^2}=\frac{\sqrt{Cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos^2\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}{Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}=\sqrt{\frac{Cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos^2\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cos^2\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}=\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}{1+Cos(\theta+\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}}\Rightarrow\frac{2x_1}{1-x_1^2}=\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}{1+Cos(\theta-\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow Arctan\left(\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}{1+Cos(\theta+\theta_0)}}\right)=2Arctan(x_2) \quad et \quad Arctan\left(\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}{1+Cos(\theta-\theta_0)}}\right)=2Arctan(x_1)$$

$$Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}}\right)=\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\sqrt{\frac{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}{1+Cos(\theta+\theta_0)}}\right)=\frac{\pi}{2}-2Arctan(x_2)$$

$$\Rightarrow Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}}\right)=\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{1}{x_2}\right)\right)=2Arctan\left(\frac{1}{x_2}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}}\right)=2Arctan\left(\frac{1}{x_1}\right)-\frac{\pi}{2}\\ Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}}\right)=2Arctan\left(\frac{1}{x_2}\right)-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

.

Posons :

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}} = \frac{1}{x_1} \qquad \psi_2 = \sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}} = \frac{1}{x_2}$$

$$\begin{cases} Arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+Cos(\theta-\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta-\theta_0)}}\right) = 2Arctan(\psi_1)-\dfrac{\pi}{2} \\ Arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+Cos(\theta+\theta_0)}{Cosh(\alpha)-Cos(\theta+\theta_0)}}\right) = 2Arctan(\psi_2)-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}}\left(\frac{\pi}{2}+2Arctan(\psi_1)-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$-\frac{q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\left(\frac{\pi}{2}-2Arctan(\psi_2)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{2qArctan(\psi_1)}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} - \frac{2q}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan(\psi_2)\right)$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{2qArctan(\psi_1)}{\pi\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} - \frac{2qArctan\left(\frac{1}{\psi_2}\right)}{\pi\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{Arctan(\psi_1)}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} - \frac{Arctan\left(\frac{1}{\psi_2}\right)}{\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\right\}.$$

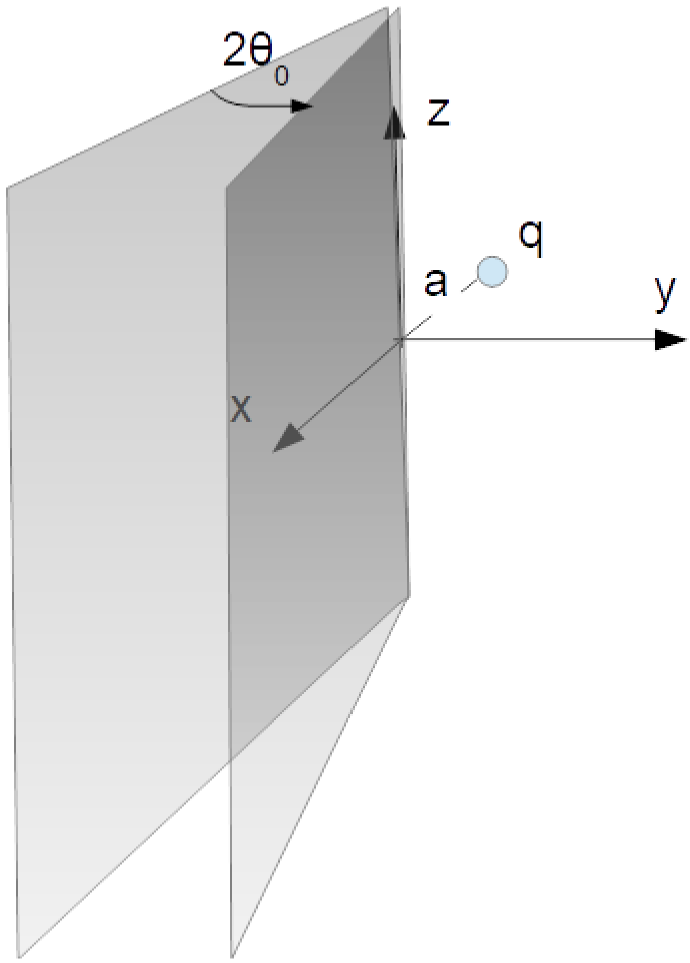
En quelque sorte, on retrouve l'expression dans N.N.Lebedev, I.P.Skalskaya et Y.S.Ufliand, 1965, « Problems of Mathematical Physics », exercice 422, page 198, mais il semble y avoir *une petite erreur de signe dans la solution de l'exercice qui s'avère être la suivante, si nos calculs sont justes :*

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)}} \qquad \psi_2 = \sqrt{\frac{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)-Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)+Cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{Arctan(\psi_1)}{\sqrt{r^2+r_0^{\,2}-2r\,r_0Cos(\theta-\theta_0)+z^2}} - \frac{Arctan(\psi_2)}{\sqrt{r_0^{\,2}+r^2+z^2-2r\,r_0Cos(\theta+\theta_0)}}\right\}.$$

Exemple : potentiel d'une charge q, placée extérieurement à un secteur d'angle 2ϑ_0 conducteur à une distance a de l'origine.

Le secteur d'angle conducteur parfait est orienté avec le bord coïncidant avec l'axe z, il est centré sur l'axe x, avec un angle 2ϑ_0. On suppose que la charge est dans le plan <x,o,z>, placé extérieurement à la distance a de l'origine. Soit en coordonnées cartésiennes la charge q est placée en (-a,0,0).



Le potentiel créé par la charge q est le suivant :

$$T_q(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2 + 2ax + y^2 + z^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,Cos(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_q(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\,Cos(\theta) + z^2}}$$

La solution est recherchée sous la forme d'une addition du potentiel crée par la charge q et d'un potentiel recherché :

$$T(r,\theta,z) = T_q(r,\theta,z) + T_0(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\,Cos(\theta) + z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\vartheta_0} = 0 \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi-\vartheta_0} = 0$$

$$\vartheta_1 \to \vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to 2\pi - \vartheta_0$$

Le potentiel $T_0(r,\theta,z)$ répond alors aux conditions aux limites suivantes :

$$T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=\vartheta_0} = T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=2\pi-\vartheta_0} = f_p^\theta(r,z) = -\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\vartheta_0)+z^2}}$$

$$\vartheta_1 \to \vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to 2\pi-\vartheta_0$$

.

L'expression de la transformée de Fourier-Cosinus de la fonction limite est relativement identique en la forme à celle de l'exemple précédent (substitution r_0->a, θ_0-> π-θ_0), il vient donc :

$$g_p^\theta(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi}K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2+a^2+2a\,rCos(\theta_0)}\right) \qquad g_p^\theta(0,\mu) = -\frac{2q}{\pi}K_0^M(\mu\,a)$$

Et la fonction modifiée est donc la suivante :

$$g_p^*(r,\mu) = \frac{2q}{\pi}\left(-K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2+a^2+2a\,rCos(\theta_0)}\right)+e^{-\mu r}K_0^M(\mu\,a)\right)$$

.

Le coefficient G se calcule donc de manière similaire à l'aide de la formule :

Comme

$$\int_0^{+\infty} dt\,\frac{K_0^M\left(\sqrt{a^2+t^2+2atCos(\vartheta)}\right)K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\,K_{i\nu}(a)Cosh(\nu\,\theta)}{\nu\,Sinh(\pi\,\nu)}$$

Ce qui donne :

$$G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}\left[K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu\,\theta_0) - K_0^M(\mu\,a)\right]$$

$$G_p(\nu,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) + \frac{2}{\pi}g_p^\theta(0,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) - \frac{4q}{\pi^2}K_0^M(\mu\,a)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu\,\theta_0)$$

Ce qui donne en chemin vers la solution du problème :

$$\vartheta_1 \to \vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to 2\pi-\vartheta_0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2-\vartheta_1 = 2\pi-2\vartheta_0 \quad \vartheta-\vartheta_1 \to \vartheta-\theta_0 \quad \vartheta_2-\vartheta \to 2\pi-\vartheta_0-\vartheta$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty}d\nu\,K_{i\nu}(\mu\,r)\frac{K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu\,\theta_0)}{Sinh(\nu(2\pi-2\vartheta_0))}\left[Sinh(\nu\,(2\pi-\vartheta_0-\theta)) + Sinh(\nu\,(\vartheta-\theta_0))\right]$$

$$a = \nu(\pi-\vartheta_0) \quad b = \nu(\pi-\theta) \quad Sinh(a+b)+Sinh(a-b) = 2Sinh(a)Cosh(b)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{2Cosh(\nu\,\theta_0)Sinh(\nu(\pi-\vartheta_0))Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Sinh(2\nu(\pi-\vartheta_0))}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))Cosh(\nu\,\theta_0)}{Cosh(\nu(\pi-\vartheta_0))}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

$$Cosh(\nu(\pi-\theta))Cosh(\nu\,\theta_0) = \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta+\theta_0)) + Cosh(\nu(\pi-\theta-\theta_0))}{2}$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty}d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta+\theta_0)) + Cosh(\nu(\pi-\theta-\theta_0))}{Cosh(\nu(\pi-\vartheta_0))}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

<u>A l'aide de la formule suivante dans F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.17 Modified Bessel Functions of Arguments x, x² and 1/x, formule 17.23, page 90)</u> :

$$\int_0^{+\infty} d\mu \, Cos(\mu\, z) K_{i\nu}(\mu\, r_0) K_{i\nu}(\mu\, r) = \frac{\pi^2}{4Cosh(\pi\,\nu)\sqrt{r_0\, r}} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{r_0{}^2 + r^2 + z^2}{2 r_0\, r}\right).$$

Il vient

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta+\theta_0)) + Cosh(\nu(\pi-\theta-\theta_0))}{Cosh(\nu(\pi-\vartheta_0))}\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z) K_{i\nu}(\mu\, r) K_{i\nu}(\mu\, a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{2\sqrt{a\,r}}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta+\theta_0)) + Cosh(\nu(\pi-\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu(\pi-\vartheta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right).$$

Et là on semble stopper dans l'élan des formules miracles, aucune n'est présente sous le boisseau.

Ce qui ne nous empêche pas de donner la solution formelle du problème :

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} -$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{a\,r}}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta+\theta_0)) + Cosh(\nu(\pi-\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu(\pi-\vartheta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right)$$

<u>Cas limite de l'angle ϑ0=π/2</u>

Dans ce cas l'expression prend la forme

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} -$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{a\,r}}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{2Cosh(\nu(\pi-\theta)) Cosh(\nu\,\theta_0)}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu\,\vartheta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\,r}}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right).$$

En consultant l'ouvrage en russe « A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions» en page 182 formule 2.17.25.3, il est donné la formule suivante :

$$(2.17.25.3) \quad \int_0^{+\infty} dx \frac{Cos(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = 2^{-\mu-\frac{1}{2}}(c+1)^{\frac{\mu}{2}}(c+Cosh(b))^{-\frac{\mu+1}{2}} P^{\mu}_{\mu}\left(\sqrt{\frac{1+Cosh(b)}{c+Cosh(b)}}\right).$$

On peut transformer cette formule en par le changement b->ib, et donner ses deux déclinaisons pour la valeur μ=0 :

$$(2.17.25.3-bis) \quad \int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = 2^{-\mu-\frac{1}{2}}(c+1)^{\frac{\mu}{2}}(c+Cos(b))^{-\frac{\mu+1}{2}} P^{\mu}_{\mu}\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c+Cos(b)}}\right)$$

$$\mu = 0 \quad P^0_0(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} dx \frac{Cos(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cosh(b)}} \\ \int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cos(b)}} \end{cases}$$

L'application de la dernière formule à notre cas donne immédiatement :

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cos(b)}} \quad x \to \nu \quad b \to \pi-\theta \quad c \to \frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\,r}} \int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu\,(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}\right)$$

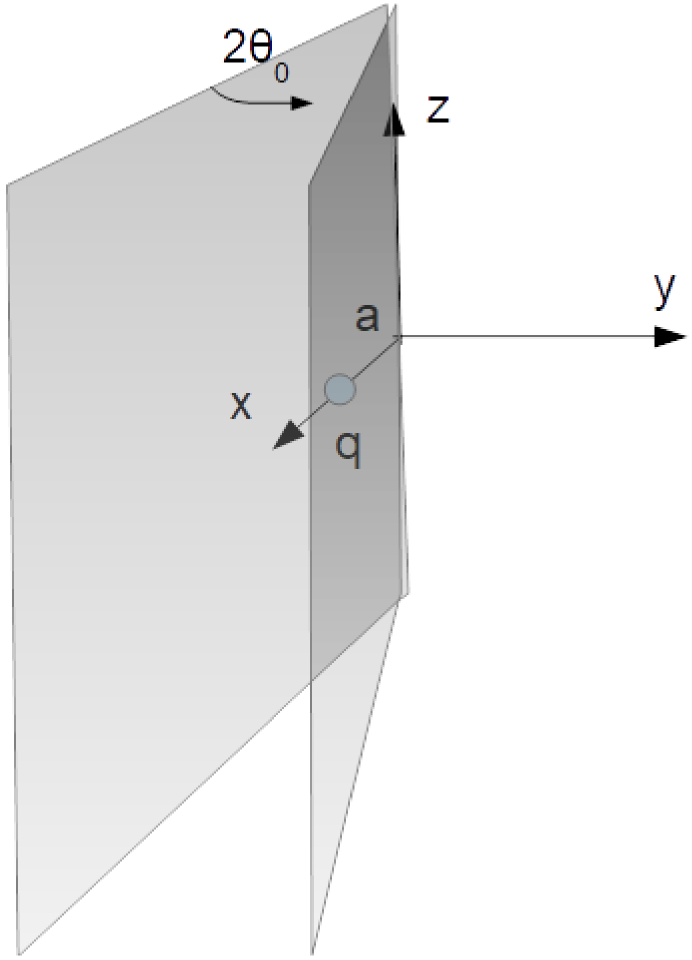
$$= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\,r}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}+Cos(\pi-\theta)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2+r^2+z^2-2a\,rCos(\theta)}}$$

Ce qui est exactement la solution trouvée par la méthode des images électriques, soit le champ d'un dipôle de charges inverses placées symétriquement au plan conducteur parfait.

Exemple : potentiel d'une charge q, placée intérieurement à un secteur d'angle $2\vartheta_0$ conducteur à une distance a de l'origine.

Le secteur d'angle conducteur parfait est orienté avec le bord coïncidant avec l'axe z, il est centré sur l'axe x, avec un angle $2\vartheta_0$. On suppose que la charge est dans le plan <x,o,z>, placé intérieurement à la distance a de l'origine. Soit en coordonnées cartésiennes la charge q est placée en (a,0,0).



Le potentiel créé par la charge q est le suivant :

$$T_q(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + z^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,Cos(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_q(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\,Cos(\theta) + z^2}}$$

La solution est recherchée sous la forme d'une addition du potentiel crée par la charge q et d'un potentiel recherché :

$$T(r,\theta,z) = T_q(r,\theta,z) + T_0(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\,Cos(\theta) + z^2}} + T_0(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=-\vartheta_0} = 0 \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\vartheta_0} = 0$$

$$\vartheta_1 \to -\vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to \vartheta_0$$

Le potentiel $T_0(r,\theta,z)$ répond alors aux conditions aux limites suivantes :

$$T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=-\vartheta_0} = T_0(r,\theta,z)\big|_{\theta=\vartheta_0} = f_p^\theta(r,z) = -\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\,Cos(\vartheta_0)+z^2}}$$

$$\vartheta_1 \to -\vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to \vartheta_0$$

.

L'expression de la transformée de Fourier-Cosinus de la fonction limite est la suivante :

$$g_p^\theta(r,\mu) = -\frac{2q}{\pi}K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2+a^2-2a\,rCos(\theta_0)}\right) \qquad g_p^\theta(0,\mu) = -\frac{2q}{\pi}K_0^M(\mu\,a)$$

Et la fonction modifiée est donc la suivante :

$$g_p^*(r,\mu) = \frac{2q}{\pi}\left(-K_0^M\left(\mu\sqrt{r^2+a^2-2a\,rCos(\theta_0)}\right)+e^{-\mu r}K_0^M(\mu\,a)\right)$$

.

Le coefficient G se calcule donc de manière similaire à l'aide de la formule :

Comme

$$\int_0^{+\infty} dt\,\frac{K_0^M\left(\sqrt{a^2+t^2-2atCos(\vartheta)}\right)K_{i\nu}(t)}{t} = \frac{\pi\,K_{i\nu}(a)Cosh(\nu\,(\pi-\theta))}{\nu\,Sinh(\pi\,\nu)}$$

Ce qui donne :

$$G_p^*(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}\left[K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu\,(\pi-\theta_0)) - K_0^M(\mu\,a)\right]$$

$$G_p(\nu,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) + \frac{2}{\pi}g_p^\theta(0,\mu) = G_p^*(\nu,\mu) - \frac{4q}{\pi^2}K_0^M(\mu\,a)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu) = -\frac{4q}{\pi^2}K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu\,(\pi-\theta_0))$$

Ce qui donne en chemin vers la solution du problème :

$$\vartheta_1 \to -\vartheta_0 \qquad \vartheta_2 \to \vartheta_0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 - \vartheta_1 = 2\vartheta_0 \quad \vartheta - \vartheta_1 \to \vartheta + \theta_0 \quad \vartheta_2 - \vartheta \to \theta_0 - \vartheta$$

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty} d\nu\,K_{i\nu}(\mu\,r)\frac{K_{i\nu}(\mu\,a)Cosh(\nu(\pi-\theta_0))}{Sinh(2\nu\vartheta_0)}\left[Sinh(\nu\,(\vartheta_0-\theta)) + Sinh(\nu\,(\vartheta+\theta_0))\right]$$

$$a = \nu\,\vartheta_0 \quad b = \nu\,\theta \quad Sinh(a+b) + Sinh(a-b) = 2Sinh(a)Cosh(b)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty} d\nu\,\frac{2Cosh(\nu(\pi-\theta_0))Sinh(\nu\,\vartheta_0)Cosh(\nu\,\theta)}{Sinh(2\nu\vartheta_0)}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{4q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty} d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta_0))Cosh(\nu\,\theta)}{Cosh(\nu\vartheta_0)}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\mu\,Cos(\mu\,z)\int_0^{+\infty} d\nu\,\frac{Cosh(\nu(\pi-\theta_0+\theta)) + Cosh(\nu(\pi-\theta_0-\theta))}{Cosh(\nu\vartheta_0)}K_{i\nu}(\mu\,r)K_{i\nu}(\mu\,a)$$

A l'aide de la formule suivante dans F.Oberhettinger, « Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions », édition 1990, section 1.17 Modified Bessel Functions of Arguments x, x^2 and 1/x, formule 17.23, page 90) :

$$\int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z) K_{i\nu}(\mu\, a) K_{i\nu}(\mu\, r) = \frac{\pi^2}{4 Cosh(\pi\nu)\sqrt{a\, r}} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right).$$

Il vient

$$T_0(r,\theta,z) = -\frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta_0+\theta)) + Cosh(\nu(\pi-\theta_0-\theta))}{Cosh(\nu\,\vartheta_0)} \int_0^{+\infty} d\mu\, Cos(\mu\, z) K_{i\nu}(\mu\, r) K_{i\nu}(\mu\, a)$$

$$\Rightarrow T_0(r,\theta,z) = -\frac{q}{2\sqrt{a\, r}}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta_0+\theta)) + Cosh(\nu(\pi-\theta_0-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu\,\vartheta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right).$$

Et là on semble encore stoppé dans l'élan des formules miracles ! Ce qui ne nous empêche pas de donner la solution formelle du problème :

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\, Cos(\theta)+z^2}} -$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{a\, r}}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu(\pi-\theta_0+\theta)) + Cosh(\nu(\pi-\theta_0-\theta))}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu\,\vartheta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right)$$

Cas limite de l'angle ϑ0=π/2

Dans ce cas l'expression prend la forme

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\, Cos(\theta)+z^2}} -$$

$$-\frac{q}{2\sqrt{a\, r}}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{2 Cosh(\nu(\pi-\theta_0)) Cosh(\nu\,\theta)}{Cosh(\pi\,\nu) Cosh(\nu\,\vartheta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\, Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\, r}}\int_0^{+\infty} d\nu\, \frac{Cosh(\nu\,\theta)}{Cosh(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\, r}\right).$$

En consultant l'ouvrage en russe « A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions» en page 182 formule 2.17.25.3, il est donné la formule suivante :

$$(2.17.25.3)\quad \int_0^{+\infty} dx \frac{Cos(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = 2^{-\mu-\frac{1}{2}}(c+1)^{\frac{\mu}{2}}(c+Cosh(b))^{-\frac{\mu+1}{2}} P^{\mu}_{\mu}\left(\sqrt{\frac{1+Cosh(b)}{c+Cosh(b)}}\right).$$

On peut transformer cette formule en par le changement b->ib, et donner ses deux déclinaisons pour la valeur μ=0 :

$$(2.17.25.3-bis)\quad \int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = 2^{-\mu-\frac{1}{2}}(c+1)^{\frac{\mu}{2}}(c+Cos(b))^{-\frac{\mu+1}{2}} P^{\mu}_{\mu}\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c+Cos(b)}}\right)$$

$$\mu = 0 \quad P^0_0(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} dx \frac{Cos(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cosh(b)}} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cos(b)}} \end{cases}$$

L'application de la dernière formule à notre cas donne immédiatement :

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{Cosh(b\,x)}{Cosh(\pi\,x)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c+Cos(b)}} \quad x \to \nu \quad b \to \theta \quad c \to \frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\,r}} \int_0^{+\infty} d\nu \frac{Cosh(\nu\,\theta)}{Cosh(\pi\,\nu)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}\left(\frac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}\right)$$

$$= \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a\,r}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{a^2+r^2+z^2}{2a\,r}+Cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\,Cos(\theta)+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2+r^2+z^2+2a\,rCos(\theta)}}$$

Ce qui est exactement la solution trouvée par la méthode des images électriques, soit le champ d'un dipôle de charges inverses placées symétriquement au plan conducteur parfait.

Problème aux limites de Dirichlet inhomogène angulaire sur un domaine bornée en z et non bornée en r

Etudions maintenant le problème suivant bornée en z, avec des conditions aux limites homogènes en z.

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1^{\theta}(r,z)\qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2^{\theta}(r,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{z=0}=T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z}=0$$

Cette fois-ci les fonctions axiales présentent des valeurs propres discrètes répondant aux conditions homogènes axiales. Il convient donc de rechercher la solution sous forme d'un mixte de série et de représentation intégrale, comme suit :

$$T(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}Sin(\mu_n\ z)\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(\mu_n\ r)\left[G_1(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}+G_2(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

$$où\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_z}$$

Chaque fonction limites se développe en série de fonctions propres axiales

$$f_p^{\theta}(r,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}g_p^{\theta}(r,\mu_n)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\ z\right)\Leftrightarrow g_p^{\theta}(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\int_0^{l_z}dz\ f_p^{\theta}(r,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\ z\right)$$

Il est alors aisée de calculer l'expression des coefficient G_p, comme suit :

$$\begin{cases}\widetilde{K}_g(\nu)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{g(\rho)K_{i\nu}(\mu\ \rho)}{\rho} & transformée\ de\ Kontorovich-Lebedev\\ \widetilde{K}_{\widetilde{g}}^{-1}(r)=\displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\ \nu)\widetilde{g}(\nu)K_{i\nu}(\mu\ r) & transformée\ inverse\ de\ Kontorovich-Lebedev\end{cases}$$

$$g_p^{\theta}(r,\mu_n)=\int_0^{+\infty}d\nu\ G_p(\nu,\mu_n)K_{i\nu}(\mu\ r)\quad pour\ p=1,2$$

$$\Rightarrow g_p^{\theta}(r,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\nu\ \nu\ Sinh(\pi\ \nu)\widetilde{g}(\nu)K_{i\nu}(\mu_n\ r)=\int_0^{+\infty}d\nu\ G_p(\nu,\mu_n)K_{i\nu}(\mu_n\ r)$$

$$\Rightarrow G_p(\nu,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\ \nu)\widetilde{g}(\nu)=\frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\ \nu)\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{g_p^{\theta}(\rho,\mu_n)K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}$$

La solution formelle du problème est donc :

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1^{\theta}(r,z)\qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2^{\theta}(r,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{z=0}=T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z}=0$$

$$g_p^{\theta}(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\int_0^{l_z}dz\ f_p^{\theta}(r,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\ z\right)\qquad où\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_z}\qquad p=1,2$$

$$G_p(\nu,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\ \nu)\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{g_p^{\theta}(\rho,\mu_n)K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}$$

$$T(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}(\mu_n\ r)\left[G_1(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}+G_2(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

Il arrive également que les conditions de finitude de l'intégrale garantissant l'application du théorème de Kontorovich-Lebedev ne soit pas remplie, et dans ce cas comme précédemment, on procède à une régularisation des coefficients de développement des fonctions limites. En réalisant les mêmes types de calculs, la solution formelle s'écrit maintenant :

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^{\theta}(r,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{z=0} = T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z} = 0$$

$$g_p^{\theta}(r,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ f_p^{\theta}(r,z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\,z\right) \Rightarrow g_p^{\theta}(0,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ f_p^{\theta}(0,z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\,z\right)$$

$$g_p^{*}(r,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ \left(f_p^{\theta}(r,z) - e^{-\mu_n r} f_p^{\theta}(0,z)\right) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\,z\right) \qquad où \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l_z} \qquad p = 1,2$$

$$tel\ que \int_0^{\frac{1}{2}} dr\, \frac{\left|g_p^{*}(r,\mu_n)\right|}{r} Log\left(\frac{1}{r}\right) < \infty \quad p = 1,\,2$$

$$G_p^{*}(\nu,\mu_n) = \frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{g_p^{*}(\rho,\mu_n) K_{i\nu}(\mu_n\,\rho)}{\rho} \quad et \quad G_p(\nu,\mu_n) = G_p^{*}(\nu,\mu_n) + \frac{2}{\pi} g_p^{\theta}(0,\mu_n)$$

$$T(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\,z\right)\int_0^{+\infty} d\nu\ K_{i\nu}(\mu_n\ r)\left[G_1(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))} + G_2(\nu,\mu_n)\frac{Sinh(\nu\ (\theta-\theta_1))}{Sinh(\nu\ (\theta_2-\theta_1))}\right]$$

Exemple : répartition de la température dans un secteur d'angle de rayon infini d'épaisseur lz, et d'angle ϑ0, dont toutes les faces sont portées à la température nulle, tandis que la frontière ϑ= ϑ0 est à la température $f(r)Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)$

Le problème aux limites est donc le suivant, avec le développement de la solution :

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=0}=0 \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_0}=f(r)Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{z=0}=T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z}=0 \qquad \theta_1=0 \quad \theta_2=\theta_0$$

$$f_1^{\theta}(r,z)=0 \Rightarrow g_1^*(r,\mu_n)=0$$

$$f_2^{\theta}(r,z)=f(r)Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right) \quad f_2^{\theta}(0,z)=f(0)Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)$$

$$g_2^*(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\int_0^{l_z}dz\ Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\left(f(r)-e^{-\mu_n r}f(0)\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right) \quad où \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_z}$$

$$\Rightarrow g_2^*(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\left(f(r)-e^{-\mu_n r}f(0)\right)\int_0^{l_z}dz\ Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)$$

$$\Rightarrow g_2^*(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\frac{l_z}{2}\left(f(r)-e^{-\mu_n r}f(0)\right)\partial_{n,n_z}=\left(f(r)-e^{-\mu_n r}f(0)\right)\partial_{n,n_z}$$

$$g_2^{\vartheta}(r,\mu_n)=f(r)\partial_{n,n_z} \Rightarrow g_2^{\theta}(0,\mu_n)=f(0)\partial_{n,n_z}$$

$$G_2^*(\nu,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{\left(f(\rho)-e^{-\mu_n\rho}f(0)\right)K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}$$

$$G_2(\nu,\mu_n)=G_2^*(\nu,\mu_n)+\frac{2}{\pi}g_2^{\theta}(0,\mu_n)$$

$$T(r,\theta,z)=Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\int_0^{+\infty}d\nu\ K_{i\nu}\left(\mu_{n_z}\ r\right)G_2\left(\nu,\mu_{n_z}\right)\frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)}$$

.

Continuons les développements, il vient :

$$G_2^*\left(\nu,\mu_{n_z}\right)=\frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\,\nu)\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{\left(f(\rho)-e^{-\mu_{n_z}\rho}f(0)\right)K_{i\nu}(\mu_{n_z}\ \rho)}{\rho}$$

$$G_2\left(\nu,\mu_{n_z}\right)=G_2^*\left(\nu,\mu_{n_z}\right)+\frac{2}{\pi}f(0)$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z)=\frac{2}{\pi}Sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\int_0^{+\infty}d\nu\left[\begin{array}{l}K_{i\nu}\left(\mu_{n_z}\ r\right)\left\{f(0)+\frac{\nu\ Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\ \frac{\left(f(\rho)-e^{-\mu_{n_z}\rho}f(0)\right)K_{i\nu}(\mu_{n_z}\ \rho)}{\rho}\right\}\times\\ \times\frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)}\end{array}\right]$$

.

Exemple : répartition de la température dans un secteur d'angle de rayon infini d'épaisseur lz, et d'angle ϑ0, dont toutes les faces sont portées à la température nulle, tandis que la frontière ϑ= ϑ0 est à la température f(r,z)

Ce sont les mêmes développements que l'exemple précédent, à ceci près que toutes les harmoniques axiales sont utilisées :

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \theta_0$$

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=0} = 0 \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_0} = f(r,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{z=0} = T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z} = 0$$

$$g_2^\theta(r,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ f(r,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right) \Rightarrow g_2^\theta(0,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ f(0,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)$$

$$g_2^*(r,\mu_n) = \left\{g_2^\theta(r,\mu_n) - e^{-\mu_n r} g_2^\theta(0,\mu_n)\right\} \qquad où \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l_z}$$

$$Posons \quad f_{\mu_n}(r) = \int_0^{l_z} dz\ f(r,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right) \quad f_{\mu_n}(0) = \int_0^{l_z} dz\ f(r,z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)$$

$$G_2^*(\nu,\mu_n) = \frac{2}{\pi^2}\nu\ Sinh(\pi\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{\left\{g_2^\theta(\rho,\mu_n) - e^{-\mu_n r} g_2^\theta(0,\mu_n)\right\}K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}$$

$$G_2^*(\nu,\mu_n) = \frac{4}{\pi^2 l_z}\nu\ Sinh(\pi\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{\left\{f_{\mu_n}(\rho) - e^{-\mu_n r} f_{\mu_n}(0)\right\}K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}$$

$$T(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)\int_0^{+\infty} d\nu \left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}(\mu_n\ r)\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{\pi\ l_z} f_{\mu_n}(0) + \\ \frac{4}{\pi^2 l_z}\nu\ Sinh(\pi\nu)\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{\left\{f_{\mu_n}(\rho) - e^{-\mu_n \rho} f_{\mu_n}(0)\right\}K_{i\nu}(\mu_n\ \rho)}{\rho}\end{array}\right\}\times \\ \times\frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)}\end{array}\right\}$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{4}{\pi\ l_z}\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)\int_0^{+\infty} d\nu \left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}r\right)\frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)}\times \\ \times\left\{f_{\mu_n}(0) + \frac{\nu\ Sinh(\pi\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho\ \frac{\left\{f_{\mu_n}(\rho) - e^{-\mu_n \rho} f_{\mu_n}(0)\right\}K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\rho\right)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}$$

Si l'on suppose que la fonction limite est indépendante du rayon, alors, il vient :

$$T(r,\theta,z)=\frac{4}{\pi\, l_z}\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)f_{\mu_n}(0)\int_0^{+\infty}d\nu\left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\,r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh(\nu\;\theta_0)}\times \\ \times\left\{1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\mu_n\,\rho}\right)K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\,\rho\right)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi\, l_z}\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)f_{\mu_n}(0)\int_0^{+\infty}d\nu\left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\,r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh(\nu\;\theta_0)}\times \\ \times\left\{1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\mu_n\,\rho}\right)K_{i\nu}(\mu_n\,\rho)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi\, l_z}\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)f_{\mu_n}(0)\int_0^{+\infty}d\nu\left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\,r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh(\nu\;\theta_0)}\times \\ \times\left\{1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}$$

Comme nous avons vu dans les premiers exemples de transformations de Kontorovich-Lebedev que l'intégrale $\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\mu_{2n+1}\,\rho}\right)K_{i\nu}(\mu_{2n+1}\,\rho)}{\rho}=\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}$,

prenait la valeur suivante :

$$\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}=\pi\,\frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1}{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}\Rightarrow 1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}=Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right).$$

Il vient :

$$T(r,\theta,z)=\frac{4}{\pi\, l_z}\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)f_{\mu_n}(0)\int_0^{+\infty}d\nu\left\{K_{i\nu}\left(\frac{n\pi}{l_z}\,r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh(\nu\;\theta_0)}Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right\}.$$

On peut encore simplifier ce calcul, en utilisant la représentation intégrale suivante (*voir l'ouvrage A.Erdelyi, H.Bateman, Higher Transcendental Functions, volume 2, page 82, section « Modified Hankel functions », formule (25)*) :

$$K_\nu(x)Cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)=\int_0^{+\infty}dt\;Cos(x\;Sinh(t))Cosh(\nu\;t)\quad si\quad x>0\quad et\quad -1<\mathrm{Re}(\nu)<1$$

$$\nu\to i\nu\Rightarrow K_{i\nu}(x)=\frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\;Cos(x\;Sinh(t))Cos(\nu\;t)$$

$$\Rightarrow K_{i\nu}(\mu_n x)=\frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\;Cos(\mu_n x\;Sinh(t))Cos(\nu\;t)$$

.

Il vient :

$$\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} K_{i\nu}(\mu_n r) = \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} \frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)} \int_0^{+\infty} dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t))Cos(\nu\ t)$$

$$= \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} \int_0^{+\infty} dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t))Cos(\nu\ t) = \int_0^{+\infty} dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t)) \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Sinh(\nu\ \theta)Cos(\nu\ t)}{Sinh(\nu\ \theta_0)}$$

$$Comme \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Sinh(\nu\ \theta)Cos(\nu\ t)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} = \frac{Sin\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\, t}{\theta_0}\right) + Cos\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} K_{i\nu}(\mu_n r) = \int_0^{+\infty} dt \, \frac{Sin\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)Cos(\mu_n r\ Sinh(t))}{Cosh\left(\frac{\pi\, t}{\theta_0}\right) + Cos\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}$$

La solution du problème s'écrit alors :

$$T(r,\theta,z) = \frac{4}{\pi\ l_z} \sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{l_z} z\right) f_{\mu_n}(0) \int_0^{+\infty} dt \, \frac{Sin\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)Cos\left(\frac{n\pi}{l_z} r\ Sinh(t)\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\, t}{\theta_0}\right) + Cos\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}$$

$$avec \quad f_{\mu_n}(0) = \int_0^{l_z} dz\ f(z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z} z\right)$$

Exemple : répartition de la température dans le quadrant 0≤x<∞,0≤y<∞,0≤z<lz, toutes les faces sont portées à la température nulle, tandis que la x=0 est à la température T0

Cette configuration géométrique correspond à un secteur d'angle droit. Il vient de la solution précédente :

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=0} = 0 \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = T_0 \qquad T(r,\theta,z)\big|_{z=0} = T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z} = 0$$

$$g_2^{\theta}(r,\mu_n) = \frac{2}{l_z} T_0 \int_0^{l_z} dz\; Sin\left(\frac{n\pi}{l_z} z\right) = \frac{l_z}{n\pi}\frac{2}{l_z} T_0\left(1-(-1)^n\right) \Rightarrow g_2^{\theta}(r,\mu_{2n}) = 0$$

$$g_2^{\theta}(r,\mu_{2n+1}) = g_2^{\theta}(0,\mu_{2n+1}) = \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} \Rightarrow f_{\mu_{2n+1}}(r) = f_{\mu_{2n+1}}(0) = \frac{2l_z T_0}{(2n+1)\pi} \quad où \quad \mu_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{l_z}$$

$$T(r,\theta,z) = \frac{8T_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{Sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} z\right)}{(2n+1)}\int_0^{+\infty} d\nu \left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\times \\ \times\left\{1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\mu_{2n+1}\rho}\right)K_{i\nu}\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z}\rho\right)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z) = \frac{8T_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{Sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} z\right)}{(2n+1)}\int_0^{+\infty} d\nu \left\{\begin{array}{l} K_{i\nu}\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} r\right)\frac{Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\times \\ \times\left\{1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}\right\}\end{array}\right\}.$$

Nous avons vu dans les premiers exemples de transformations de Kontorovich-Lebedev que l'intégrale $\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\mu_{2n+1}\rho}\right)K_{i\nu}(\mu_{2n+1}\rho)}{\rho} = \int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho}$,

prenait la valeur suivante :

$$\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho} = \pi\,\frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-1}{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)} \Rightarrow 1+\frac{\nu\;Sinh(\pi\,\nu)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho\,\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)K_{i\nu}(\rho)}{\rho} = Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right).$$

Le résultat final attendu est donc le suivant :

$$T(r,\theta,z) = \frac{8T_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{Sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} z\right)}{(2n+1)}\int_0^{+\infty} d\nu\,\frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\;\theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)} K_{i\nu}\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z} r\right).$$

En utilisant la représentation intégrale suivante :

$$K_{i\nu}(x)=\frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\ Cos(x\ Sinh(t))Cos(\nu\ t)$$

$$\Rightarrow K_{i\nu}(\mu_n x)=\frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\ Cos(\mu_n x\ Sinh(t))Cos(\nu\ t)$$

Il vient :

$$\int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}K_{i\nu}(\mu_n r)=\int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\frac{1}{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t))Cos(\nu\ t)$$

$$=\int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty}dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t))Cos(\nu\ t)=\int_0^{+\infty}dt\ Cos(\mu_n r\ Sinh(t))\int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Sinh(\nu\ \theta)Cos(\nu\ t)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}$$

$$Comme\ \int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Sinh(\nu\ \theta)Cos(\nu\ t)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}=\frac{Sin(2\theta)}{Cosh(2t)+Cos(2\theta)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}d\nu\ \frac{Cosh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Sinh(\nu\ \theta)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}K_{i\nu}(\mu_n r)=\int_0^{+\infty}dt\ \frac{Sin(2\theta)Cos(\mu_n r\ Sinh(t))}{Cosh(2t)+Cos(2\theta)}$$

Le résultat peut donc s'écrire sous une forme plus simple :

$$T(r,\theta,z)=\frac{8T_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{Sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z}z\right)}{(2n+1)}\int_0^{+\infty}dt\ \frac{Cos(\mu_n r\ Sinh(t))}{Cosh(2t)+Cos(2\theta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,z)=\frac{8T_0}{\pi^2}Sin(2\theta)\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{Sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z}z\right)}{(2n+1)}\int_0^{+\infty}dt\ \frac{Cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l_z}r\ Sinh(t)\right)}{Cosh(2t)+Cos(2\theta)}.$$

Démontrons la formule qui permet de calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} d\nu \,\frac{Sinh(\nu\ \theta)Cos(\nu\ t)}{Sinh\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}$

Il vient :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(p\tau)Cos(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\frac{Sin\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\ r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)} \quad p\in[0,q[$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(p\tau)Cos(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(p\tau)Cosh(ir\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh((p+ir)\tau)+Sinh((p-ir)\tau)}{Sinh(q\tau)}$$

$$Comme \quad \int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(a\tau)}{Sinh(b\tau)} = \frac{\pi}{2b}Tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \quad b>|a|$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh((p+ir)\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}Tan\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right) \quad et \quad \int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh((p+ir)\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}Tan\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(p\tau)Cosh(ir\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\left(Tan\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)+Tan\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)\right) = \frac{\pi}{2q}\left(\frac{Sin\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)}+\frac{Sin\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2q}\left(\frac{Sin\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)+Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Sin\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}\right)$$

$$Cos(a)Cos(b) = \frac{1}{2}(Cos(a+b)+Cos(a-b)) \qquad Sin(a)Cos(b)+Cos(a)Sin(b) = Sin(a+b)$$

$$=\frac{\pi}{2q}\frac{Sin\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\ r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)}$$

Soit en réalisant les substitutions suivantes, le résultat attendu :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \,\frac{Sinh(p\tau)Cos(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\frac{Sin\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\ r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi\ p}{q}\right)} \quad p\in[0,q[$$

$$\tau\to\nu \quad p=\theta \quad r=t \quad q=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\nu \,\frac{Sinh(\theta\nu)Cos(t\nu)}{Sinh\left(\frac{\pi\ \nu}{2}\right)} = \frac{Sin(2\theta)}{Cosh(2t)+Cos(2\theta)}$$

.

Et de même :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Sinh(p\tau)Cos(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q} \frac{Sin\left(\frac{\pi\, p}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\, r}{q}\right) + Cos\left(\frac{\pi\, p}{q}\right)} \quad p \in [0, q[$$

$$\tau \to \nu \quad p = \theta \quad r = t \quad q = \theta_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{Sinh(\theta\nu)Cos(t\,\nu)}{Sinh(\nu\ \theta_0)} = \frac{Sin\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\, t}{\theta_0}\right) + Cos\left(\frac{\pi\,\theta}{\theta_0}\right)}$$

<u>Problèmes de Dirichlet inhomogène angulaire, Dirichlet homogène radial</u>

Le problème de Dirichlet inhomogène angulaire décrit précédemment était non borné en r et borné ou non-borné en z. Introduisons une condition aux limites radiale homogène :

$$\Delta T(r,\theta,z)=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{r=l_r}=0$$

La solution de base issue de la séparation des variables est cette fois la suivante :

$$T(r,\theta,z)=\left(K_{iv}(\mu\, r)I_{iv}(\mu\, l_r)-K_{iv}(\mu\, l_r)I_{iv}(\mu\, r)\right)\left(A_\theta Cosh(\nu\,\theta)+B_\theta Sinh(\nu\,\theta)\right)\left(A_z Cos(\mu\, z)+B_z Sin(\mu\, z)\right)$$

Pour une fonction ni paire ni impaire, on sépare le problème en deux sous-problèmes avec respectivement les fonctions limites suivantes :

$$f_p^{+\theta}(r,z)=\frac{f_p^{\theta}(r,z)+f_p^{\theta}(r,-z)}{2} \qquad f_p^{-\theta}(r,z)=\frac{f_p^{\theta}(r,z)-f_p^{\theta}(r,-z)}{2}$$

On cherche la solution du problème sous la forme d'une double intégrale (sur le spectre radiale et angulaire) en introduisant un noyau intégrale qui s'annule en r=lr :

$$L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)=I_{i\tau}(\mu\, r)K_{i\tau}(\mu\, l_r)-I_{i\tau}(\mu\, l_r)K_{i\tau}(\mu\, r)$$

$$T(r,\theta,z)=\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\tau\, L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)\left[G_1(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}+G_2(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right]$$

L'application des conditions aux limites de Dirichlet donne :

$$p=1,2 \quad g_p^{\theta}(r,\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}dz\, f_p^{\theta}(r,z)Cos(\mu\, z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\tau\, L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)G_1(\tau,\mu)=\int_0^{+\infty}d\mu\, g_1^{\theta}(r,\mu)Cos(\mu\, z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=\int_0^{+\infty}d\mu\, Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty}d\tau\, L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)G_2(\tau,\mu)=\int_0^{+\infty}d\mu\, g_2^{\theta}(r,\mu)Cos(\mu\, z)$$

$$\Rightarrow g_p^{\theta}(r,\mu)=\int_0^{+\infty}d\tau\, L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)G_p(\tau,\mu)$$

Dès lors la solution dépend des valeurs des fonctions G1 et G2 qui sont les coefficients de l'expansion intégrale par le noyau L d'ordre imaginaire. Comme nous exposons les résultats de l'article, voici la solution formelle du problème :

$$Comme \quad \begin{cases} \widetilde{g}(\tau,\alpha)=\int_0^{\alpha}dx\,\frac{g(x)L_{i\tau}(x,\alpha)}{x}=\widetilde{g}(\tau,\mu\, l_r)=\int_0^{l_r}dr\,\frac{g(\mu\, r)L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)}{r} \\ g(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,\frac{Sinh(\pi\,\tau)}{\left|I_{i\tau}(\mu\, l_r)\right|^2}\widetilde{g}(\tau,\mu\, l_r)L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r) \end{cases}$$

$$Si \quad g_p^{\theta}(r,\mu)=\int_0^{+\infty}d\tau\, G_p(\tau,\mu)L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r) \quad pour\ p=1,2$$

$$Alors \quad G_p(\tau,\mu)=\frac{2}{\pi^2}\tau\,\frac{Sinh(\pi\,\tau)}{\left|I_{i\tau}(\mu\, l_r)\right|^2}\int_0^{l_r}dr\,\frac{g_p^{\theta}(r,\mu)L_{i\tau}(\mu\, r,\mu\, l_r)}{r}$$

Et la solution formelle du problème est la suivante :

$$L_{i\tau}(\mu r, \mu l_r) = I_{i\tau}(\mu r)K_{i\tau}(\mu l_r) - I_{i\tau}(\mu l_r)K_{i\tau}(\mu r)$$

$$p = 1,2 \quad g_p^\theta(r,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dz\ f_p^\theta(r,z)Cos(\mu z)$$

$$G_p(\tau,\mu) = \frac{2}{\pi^2}\tau\frac{Sinh(\pi\tau)}{|I_{i\tau}(\mu l_r)|^2}\int_0^{l_r} dr\ \frac{g_p^\theta(r,\mu)L_{i\tau}(\mu r,\mu l_r)}{r}$$

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu z)\int_0^{+\infty} d\tau\ L_{i\tau}(\mu r,\mu l_r)\left[G_1(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} + G_2(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right]$$

Cette expansion intégrale est possible grâce à un article qui étend la transformation intégrale de Kontorovich-Lebedev, dans une article de 1965 des auteurs Ya. S. Uflyand, E. A. Yushkova : « Solution of the Dirichlet problem for a finite wedge by means of special integral transforms using Bessel functions »

<u>Transformation intégrale de « Ya. S. Uflyand, E. A. Yushkova » pour le problème de Dirichlet</u>

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,α), telle que f(α)=0, si :
1 - continue par morceau et dont la variation est bornée sur tout intervalle [x1,x2] de [0,α] et
2 - telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{\alpha} dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) < \infty$

Alors cette dernière admet la représentation intégrale suivante, pour x € [0,α] :

$$L_{i\tau}(x,\alpha) = I_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha) - I_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\frac{L_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|^2}\int_0^{\alpha} dt\ f(t)\frac{L_{i\tau}(t,\alpha)}{t}\cdot$$

En terme de transformée et transformée inverse modifiée de Kontorovich-Lebedev, il vient :

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\frac{L_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|^2}\int_0^{\alpha} dt\ f(t)\frac{L_{i\tau}(t,\alpha)}{t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(\tau,\alpha) = \int_0^{\alpha} dt\ f(t)\frac{L_{i\tau}(t,\alpha)}{t} \quad transformée \\ f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)\frac{L_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|^2}\tilde{f}(\tau,\alpha) \quad transformée\ inverse \end{cases}$$

L'article indique que lorsque la limite α tend vers l'infini, alors on retrouve la transformation de Kontorovitch-Lebedev :

$$\lim_{\alpha\to\infty}|I_{i\tau}(\alpha)| = +\infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to\infty}\frac{L_{i\tau}(x,\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{I_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|} - \frac{I_{i\tau}(\alpha)}{|I_{i\tau}(\alpha)|}K_{i\tau}(x) = \pm K_{i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\int_0^{+\infty} dt\ f(t)\frac{K_{i\tau}(t)}{t}$$

Pour un problème aux limites sur le secteur d'angle borné en z, alors la solution s'écrit :

$$L_{i\tau}(x,\alpha)=I_{i\tau}(x)K_{i\tau}(\alpha)-I_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x) \quad x=\mu_n r \quad \alpha=\mu_n l_r$$

$$T(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin(\mu_n z)\int_0^{+\infty} d\tau\; L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r)\left[G_1(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}+G_2(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right]$$

$$où \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_z}$$

Chaque fonction limite se développe en série de fonctions propres axiales :

$$f_p^\theta(r,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} g_p^\theta(r,\mu_n) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right) \Leftrightarrow g_p^\theta(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\; f_p^\theta(r,z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right)$$

Il est alors aisée de calculer l'expression des coefficient G_p, comme suit :

$$Comme \quad \begin{cases} \tilde{g}(\tau,\alpha)=\int_0^{\alpha} dx\, \frac{g(x)L_{i\tau}(x,\alpha)}{x}=\tilde{g}(\tau,\mu_n l_r)=\int_0^{l_r} dr\, \frac{g(\mu_n r)L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r)}{r} \\ g(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\; \tau\, \frac{Sinh(\pi\tau)}{\left|I_{i\tau}(\mu_n l_r)\right|^2}\tilde{g}(\tau,\mu_n l_r)L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r) \end{cases}$$

$$Si \quad g_p^\theta(r,\mu_n)=\int_0^{+\infty} d\tau\; G_p(\tau,\mu_n)L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r) \quad pour\; p=1,2$$

$$Alors \quad G_p(\tau,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\tau\,\frac{Sinh(\pi\tau)}{\left|I_{i\tau}(\mu_n l_r)\right|^2}\int_0^{l_r} dr\, \frac{g_p^\theta(r,\mu_n)L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r)}{r}$$

La solution formelle du problème est donc :

$$C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1^\theta(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2^\theta(r,z)$$

$$T(r,\theta,z)\big|_{r=l_r}=T(r,\theta,z)\big|_{z=0}=T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z}=0$$

$$g_p^\theta(r,\mu_n)=\frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\; f_p^\theta(r,z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}z\right) \qquad où \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_z} \qquad p=1,2$$

$$G_p(\tau,\mu_n)=\frac{2}{\pi^2}\tau\,\frac{Sinh(\pi\tau)}{\left|I_{i\tau}(\mu_n l_r)\right|^2}\int_0^{l_r} dr\, \frac{g_p^\theta(r,\mu_n)L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r)}{r}$$

$$T(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin(\mu_n z)\int_0^{+\infty} d\tau\; L_{i\tau}(\mu_n r,\mu_n l_r)\left[G_1(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}+G_2(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right]$$

Problèmes de Dirichlet inhomogène angulaire, Robin homogène radial

Dans l'article suivant daté de 1966 de E. A. Yushkova : « Certain singular boundary value problems for the Bessel equation and their applications in mathematical physics », l'auteur introduit une représentation intégrale qui donne la solution du problème de Dirichlet inhomogène sur un secteur d'angle de rayon limité, avec une condition de Robin homogène radiale.

$$\Delta T(r,\theta,z)=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1^{\theta}(r,z) \quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2^{\theta}(r,z) \quad \alpha\frac{\partial T(r,\theta,z)}{\partial r}+\beta T(r,\theta,z)\bigg|_{r=l_r}=0$$

La construction de la solution du problème se ramène à la représentation intégrale d'un forme f(x) sur un intervalle bornée [0,α] répondant à une condition de Robin en x= α de la forme :

Transformation intégrale de « E. A. Yushkova » pour le problème mixte de Dirichlet et Robin

Pour toute fonction f(x) sur l'intervalle [0,γ), telle que f'(γ)+hf(γ)=0, si :
1 - continue par morceau et dont la variation est bornée sur tout intervalle [x1,x2] de [0,α] et
2 - telle que l'intégrale est finie : $\int_0^{\gamma} dx \frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} Log\left(\frac{1}{x}\right) < \infty$
Alors cette dernière admet la représentation intégrale suivante, pour x € [0,α] :

$$H_{i\tau}(x,\gamma)=K_{i\tau}(x)\left(I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right)-I_{i\tau}(x)\left(K_{i\tau}'(\gamma)+hK_{i\tau}(\gamma)\right)$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{H_{i\tau}(t,\gamma)}{t}.$$

$$\left|I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right|^2=\left(I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right)\left(I_{-i\tau}'(\gamma)+hI_{-i\tau}(\gamma)\right)$$

En terme de transformée et transformée inverse modifiée de Kontorovich-Lebedev, il vient :

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{H_{i\tau}(t,\gamma)}{t}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{f}(\tau,\gamma)=\displaystyle\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{L_{i\tau}(t,\gamma)}{t} \quad transformée\\ f(x)=\displaystyle\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\,\tau)\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}'(\gamma)+hI_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\tilde{f}(\tau,\gamma) \quad transformée\ inverse\end{cases}$$

Lorsque l'on prend pour paramètre h=β/α, soit :

$$H_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x)\left(I_{i\tau}'(\gamma) + \frac{\beta}{\alpha} I_{i\tau}(\gamma)\right) - I_{i\tau}(x)\left(K_{i\tau}'(\gamma) + \frac{\beta}{\alpha} K_{i\tau}(\gamma)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{\alpha\ H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|\alpha I_{i\tau}'(\gamma) + \beta I_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{\alpha\ H_{i\tau}(t,\gamma)}{t}$$

Posons

$$R_{i\tau}(x,\gamma) = \alpha\ H_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x)(\alpha\ I_{i\tau}'(\gamma) + \beta\ I_{i\tau}(\gamma)) - I_{i\tau}(x)(\alpha\ K_{i\tau}'(\gamma) + \beta\ K_{i\tau}(\gamma))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\ f'(\gamma) + \beta\ f(\gamma) = 0 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{R_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|\alpha I_{i\tau}'(\gamma) + \beta I_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{R_{i\tau}(t,\gamma)}{t} \end{cases}$$

Dans le cas β=0, α=1, condition homogène de Neumann, il vient :

$$R_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x) I_{i\tau}'(\gamma) - I_{i\tau}(x) K_{i\tau}'(\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(\gamma) = 0 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{R_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}'(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{R_{i\tau}(t,\gamma)}{t} \end{cases}.$$

Dans le cas β=1, α=0, condition homogène de Dirichlet, il vient la solution décrite précédemment à savoir :

$$f(\gamma) = 0 \qquad R_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x) I_{i\tau}(\gamma) - I_{i\tau}(x) K_{i\tau}(\gamma)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{R_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ f(t)\frac{R_{i\tau}(t,\gamma)}{t}$$

L'article indique que lorsque la limite γ tend vers l'infini, alors on retrouve la transformation de Kontorovitch-Lebedev :

$$\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{I_{i\tau}(\gamma)} = K_{i\tau}(x)\left(\frac{I_{i\tau}'(\gamma)}{I_{i\tau}(\gamma)} + h\right) - \frac{I_{i\tau}(x)}{I_{i\tau}(\gamma)}(K_{i\tau}'(\gamma) + hK_{i\tau}(\gamma))$$

$$\Rightarrow \lim_{\gamma\to\infty}\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}(\gamma)\right|} = \pm hK_{i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau)\frac{H_{i\tau}(x,\gamma)}{\left|I_{i\tau}(\gamma)\right|}\frac{1}{\left|\dfrac{I_{i\tau}'(\gamma)}{I_{i\tau}(\gamma)} + h\right|^2}\int_0^{\gamma} dt\ \frac{H_{i\tau}(t,\gamma)}{\left|I_{i\tau}(\gamma)\right|}\frac{f(t)}{t}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\ \tau) K_{i\tau}(x)\int_0^{\gamma} dt\ K_{i\tau}(x)\frac{f(t)}{t}$$

Application de la transformation intégrale « E. A. Yushkova » aux problèmes aux limites sur un secteur d'angle de rayon limité et de hauteur limitée ou infinie :

La solution formelle du problème illimité en z:

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^{\theta}(r,z) \qquad \alpha\frac{\partial T(r,\theta,z)}{\partial r} + \beta\, T(r,\theta,z)\Big|_{r=l_r} = 0$$

$$R_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x)\left(\alpha\, I_{i\tau}'(\gamma) + \beta\, I_{i\tau}(\gamma)\right) - I_{i\tau}(x)\left(\alpha\, K_{i\tau}'(\gamma) + \beta\, K_{i\tau}(\gamma)\right)$$

$$pour\ \ p = 1,2\quad \begin{cases} g_p^{\theta}(r,\mu) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} dz\ f_p^{\theta}(r,z) Cos(\mu\, z) \quad \gamma = \mu\, l_r \\ G_p(\tau,\mu) = \dfrac{2}{\pi^2}\tau\ \dfrac{Sinh(\pi\,\tau)}{\left|\alpha I_{i\tau}'(\gamma) + \beta I_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\displaystyle\int_0^{l_r} dr\ \dfrac{g_p^{\theta}(r,\mu) R_{i\tau}(\mu\, r, \mu\, l_r)}{r} \end{cases}$$

$$T(r,\theta,z) = \int_0^{+\infty} d\mu\ Cos(\mu\, z)\int_0^{+\infty} d\tau\ R_{i\tau}(\mu\, r, \mu\, l_r)\left[G_1(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} + G_2(\tau,\mu)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right].$$

La solution formelle du problème limité en z est donc :

$$C.L.\quad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_1} = f_1^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{\theta=\theta_2} = f_2^{\theta}(r,z) \qquad T(r,\theta,z)\big|_{z=0} = T(r,\theta,z)\big|_{z=l_z} = 0$$

$$\alpha\frac{\partial T(r,\theta,z)}{\partial r} + \beta\, T(r,\theta,z)\Big|_{r=l_r} = 0$$

$$R_{i\tau}(x,\gamma) = K_{i\tau}(x)\left(\alpha\, I_{i\tau}'(\gamma) + \beta\, I_{i\tau}(\gamma)\right) - I_{i\tau}(x)\left(\alpha\, K_{i\tau}'(\gamma) + \beta\, K_{i\tau}(\gamma)\right)$$

$$g_p^{\theta}(r,\mu_n) = \frac{2}{l_z}\int_0^{l_z} dz\ f_p^{\theta}(r,z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_z}\, z\right) \qquad où \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l_z} \qquad p = 1,2$$

$$G_p(\tau,\mu_n) = \frac{2}{\pi^2}\tau\ \frac{Sinh(\pi\,\tau)}{\left|\alpha I_{i\tau}'(\gamma) + \beta I_{i\tau}(\gamma)\right|^2}\int_0^{l_r} dr\ \frac{g_p^{\theta}(r,\mu_n) R_{i\tau}(\mu_n r, \mu_n l_r)}{r} \qquad \gamma = \mu_n l_r$$

$$T(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} Sin(\mu_n z)\int_0^{+\infty} d\tau\ R_{i\tau}(\mu_n r, \mu_n l_r)\left[G_1(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} + G_2(\tau,\mu_n)\frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_1))}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\right].$$

Quelques propriétés des fonctions de Lommel et fonctions de Lommel modifiées

Fonctions de Lommel de première et deuxième espèce :

Solution de l'équation différentielle de Bessel inhomogène $z^2y''+zy'+\left(z^2-\nu^2\right)y=z^{\mu+1}\rightarrow\begin{cases}s_{\mu,\nu}(z)\\S_{\mu,\nu}(z)\end{cases}$

$$s_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu+1}\frac{{}_1F_2\left(1;\frac{\mu+\nu+3}{2},\frac{\mu-\nu+3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2-\nu^2}$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{Sin\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)J_\nu(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)Y_\nu(z)\right\}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)-2^{\mu-1}\frac{\pi}{Sin(\pi\nu)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)}J_\nu(z)-\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)}J_{-\nu}(z)\right\}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)-2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)J_\nu(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)J_{-\nu}(z)\right\}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{e^{i\pi\frac{\mu-\nu-1}{2}}J_\nu(z)+iCos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)H_\nu^{(1)}(z)\right\}\Leftarrow Y_\nu(z)=i\left(J_\nu(z)-H_\nu^{(1)}(z)\right)$$

Liens avec les fonctions de Struve **H** et **K** :

$$\mu=\nu\rightarrow\begin{cases}s_{\nu,\nu}(z)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)\\S_{\nu,\nu}(z)=s_{\nu,\nu}(z)-2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}Y_\nu(z)\Rightarrow S_{\nu,\nu}(z)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\{\mathbf{H}_\nu(z)-Y_\nu(z)\}\\\mathbf{K}_\nu(z)=\mathbf{H}_\nu(z)-Y_\nu(z)\rightarrow S_{\nu,\nu}(z)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{K}_\nu(z)\end{cases}$$

Deuxième Ordre ν purement imaginaire, ν=iτ

Si le premier ordre μ est réel et l'argument réel alors la fonction de premier espèce est réel, ainsi que la fonction de deuxième espèce :

$$s_{\mu,i\tau}(x)=z^{\mu+1}\frac{{}_1F_2\left(1;\frac{\mu+3+i\tau}{2},\frac{\mu+3-i\tau}{2};-\frac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2+\tau^2}\in\mathbf{R}\qquad S_{\mu,i\tau}(z)=s_{\mu,i\tau}(z)-2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)}{iSinh(\pi\tau)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)J_{i\tau}(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)J_{-i\tau}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S_{\mu,i\tau}(z)=s_{\mu,i\tau}(z)-2^{\mu-1}\frac{\pi}{iSinh(\pi\tau)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-i\tau}{2}\right)}J_{i\tau}(z)-\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)}J_{-i\tau}(z)\right\}\\S_{\mu,i\tau}(z)=s_{\mu,i\tau}(z)-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)\left\{\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(z))-\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\right\}\in\mathbf{R}\end{cases}$$

Lorsque le premier ordre μ est un entier, il vient :

$$\begin{cases} S_{0,i\tau}(z)=s_{0,i\tau}(z)-\dfrac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(z)) & S_{2n,i\tau}(z)=s_{2n,i\tau}(z)-(-1)^n\dfrac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(z))\prod_{l=0}^{l=n}\left\{\tau^2+(2l+1)^2\right\} \\ S_{1,i\tau}(z)=s_{1,i\tau}(z)+\dfrac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z)) & S_{2n+1,i\tau}(z)=s_{2n+1,i\tau}(z)+(-1)^n\dfrac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\prod_{l=0}^{l=n}\left\{\tau^2+4l^2\right\} \end{cases}$$

<u>*Comportement asymptotique z ->∞*</u>

Développement en série de puissance ascendante autour de 0

$$s_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu+1}\frac{{}_1F_2\left(1;\dfrac{\mu+\nu+3}{2},\dfrac{\mu-\nu+3}{2};-\dfrac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2-\nu^2}=\frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2-\nu^2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\Gamma(1+l)\Gamma\left(\dfrac{\mu+\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\mu+\nu+3}{2}+l\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu+3}{2}+l\right)}\frac{(-1)^l z^{2l}}{l!\,2^{2l}}$$

$$\Rightarrow s_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(-1)^l z^{2l}}{\prod_{m=1}^{m=l}\left((\mu+2m-1)^2-\nu^2\right)}=z^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(-1)^l z^{2l}}{a_l(\mu,\nu)}\quad a_0(\mu,\nu)=1\quad a_l(\mu,\nu)=\prod_{m=1}^{m=l}\left((\mu+2m-1)^2-\nu^2\right)$$

$$\textit{Et également}\quad a_0(\mu,\nu)=1\quad a_l(\mu,\nu)=\frac{2^{2l}\left((\mu+1)^2-\nu^2\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu+\nu+3}{2}+l\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu+3}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\mu+\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu+3}{2}\right)}$$

Développement en série de puissance descendante autour de ∞

$$S_{\mu,\nu}(z)\approx z^{\mu-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l a_l(-\mu,\nu)z^{-2l}\qquad a_0(-\mu,\nu)=1\qquad a_l(-\mu,\nu)=\prod_{m=1}^{m=l}\left((2m-1-\mu)^2-\nu^2\right)$$

$$\approx z^{\mu-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\Gamma(1+l)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu+\nu}{2}+l\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu-\nu}{2}+l\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu-\nu}{2}\right)}\frac{1}{l!}\left(-\frac{4}{z^2}\right)^l\Rightarrow S_{\mu,\nu}(z)\approx z^{\mu-1}{}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2},1;;-\frac{4}{z^2}\right)$$

Attention le développement en série de puissance descendante est purement formel car exprimé sous forme d'une fonction hypergéométrique 3F0, il est clairement divergent, sauf si la série se termine, soit une forme polynomiale. Et pour cela, il convient que les valeurs (3-μ+ν)/2 ou (3-μ-ν)/2 soit un entier négatif, ou encore que (μ-ν) ou (μ+ν) soit un entier impair strictement positif. Pour ces seuls cas on a le développement en série licite et convergent autour de **∞** *:*

$$\textit{Si}\quad \mu+\nu=2p+1\qquad \textit{ou}\qquad \mu-\nu=2p+1$$

$$\Rightarrow S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu-1}{}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2},1;;-\frac{4}{z^2}\right)$$

<u>*Développement des fonctions de Lommel de première espèce en fonction de Bessel*</u>

$$s_{\mu,\nu}(z)=2^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!(2l+\mu+1-\nu)(2l+\mu+1+\nu)}J_{2l+\mu+1}(z)\Leftrightarrow s_{\mu,\nu}(z)=2^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!\left((2l+\mu+1)^2-\nu^2\right)}J_{2l+\mu+1}(z)$$

$$\nu=i\tau\Rightarrow s_{\mu,i\tau}(z)=2^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!\left((2l+\mu+1)^2+\tau^2\right)}J_{2l+\mu+1}(z)\Rightarrow\begin{cases} s_{0,i\tau}(z)=2\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+1)}{\left((2l+1)^2+\tau^2\right)}J_{2l+1}(z) \\ s_{1,i\tau}(z)=8\displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty}\frac{l^2}{\left(4l^2+\tau^2\right)}J_{2l}(z)\end{cases}$$

Comportement asymptotique uniforme de la fonction de Lommel de première et de deuxième espèce s lorsque ν ->∞

En appliquant la règle $t_{\mu,\nu}(z)=-i^{1-\mu}s_{\mu,\nu}(iz)\Leftrightarrow s_{\mu,\nu}(z)=-i^{\mu-1}t_{\mu,\nu}(-iz)$ *(voir plus loin le comportement asymptotique uniforme des fonctions modifiées de Lommel), la construction est la suivante :*

$$\left.\begin{aligned}&s_{\mu,\nu}(z)=-i^{\mu-1}t_{\mu,\nu}(-iz)\\&t_{\mu,\nu}(z)\approx\frac{z^{\mu+1}}{\nu^2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l\left(\mu,\nu,\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow s_{\mu,\nu}(z)\approx-i^{\mu-1}(-i)^{\mu+1}\frac{z^{\mu+1}}{\nu^2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l\left(\mu,\nu,-i\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}\approx\frac{z^{\mu+1}}{\nu^2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l\left(\mu,\nu,-i\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}$$

Comme $\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)$ *est uniquement fonction de* ζ^2 $\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta^2)\to\widetilde{G}_l(\mu,\nu,-\zeta^2)$

Soit la construction suivante

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)=\dfrac{(\mu+1)^2\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+(2\mu+3)\zeta\dfrac{d}{d\zeta}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+\zeta^2\dfrac{d^2}{d\zeta^2}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)}{1-\zeta^2}\\ s_{\mu,\nu}(z)\approx\dfrac{z^{\mu+1}}{\nu^2}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l\left(\mu,\nu,\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}\end{cases}$$

Avec $\widetilde{G}_0(\mu,\nu,\zeta)=-\dfrac{1}{1-\zeta^2}$ $\quad\widetilde{G}_1(\mu,\nu,\zeta)=\dfrac{-(1+\mu)^2-2\zeta^2(3-\mu^2)-\zeta^4(1-\mu)^2}{(1-\zeta^2)^4}$

$$\widetilde{G}_2(\mu,\nu,\zeta)=\frac{-(1+\mu)^4-4\zeta^2(7+2\mu-\mu^2)-2\zeta^4(175+34\mu-38\mu^2-6\mu^3+3\mu^4)-4\zeta^6(49-39\mu+2\mu^2+5\mu^3-\mu^4)-\zeta^8(\mu-1)^2(\mu-3)^2}{(1-\zeta^2)^7}$$

Réduit au seul premier terme, l'expression est relativement simple, tant pour un paramètre ν réel ou purement imaginaire :

$$s_{\mu,\nu}(z)\approx-\frac{z^{\mu+1}}{\nu^2-z^2}\Rightarrow s_{\mu,i\tau}(z)\approx\frac{z^{\mu+1}}{\tau^2+z^2}$$

Par ailleurs le terme additionnelle pour définir la fonction de Lommel de deuxième espèce a également une expression asymptotique « relativement » simple .

$$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{Sin\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)J_\nu(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)Y_\nu(z)\right\}$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)-2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)J_\nu(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)J_{-\nu}(z)\right\}$$

La fonction Gamma se développe comme suit :

$$\Gamma(z)\approx\sqrt{2\pi}\;z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\Rightarrow\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\approx\frac{\pi}{2^\mu}\frac{\nu^\mu}{Cos\left(\frac{\pi(\nu-\mu)}{2}\right)}$$

Dans le cas d'un paramètre v réel les fonctions de Bessel ont le développement suivant :

$$J_\nu(z) \approx \frac{2^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \nu^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{\nu} z^{\nu} \qquad Y_\nu(z) \approx -\frac{2^{\frac{1}{2}+\nu}}{\sqrt{\pi}} \nu^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\nu} z^{-\nu}$$

Ce qui donne :

$$S_{\mu,\nu}(z) \approx \frac{z^{\mu+1}}{z^2-\nu^2} + \sqrt{\pi}\, 2^{\nu-\frac{1}{2}} \nu^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} e^{-\nu} z^{-\nu}$$

Et dans le cas d'un paramètre v purement imaginaire :

$$S_{\mu,i\tau}[z] = s_{\mu,i\tau}[z] + 2^{\mu-1}\Gamma\left[\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right] \times \Gamma\left[\frac{1+\mu-i\tau}{2}\right] \left(\frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right]}{\text{Cosh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} \text{Re}[J_{i\tau}[z]] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right]}{\text{Sinh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} \text{Im}[J_{i\tau}[z]]\right)$$

Et les deux développements des parties réelle et imaginaire de la fonction de Bessel réduit au premier terme sont les suivants :

$$\xi[\tau, z] = \frac{\sqrt{\tau^2+z^2}}{\tau} + \text{Log}\left[\frac{z}{\tau+\sqrt{\tau^2+z^2}}\right] \Rightarrow \tau\,\xi[z,\tau] = \sqrt{\tau^2+z^2} + \tau\,\text{Log}\left[\frac{z}{\tau+\sqrt{\tau^2+z^2}}\right]$$

$$\text{Re}[J_{i\tau}[z]] \approx \frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}} \left(\frac{\tau^2}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{Cos}\left[\tau\,\xi[z,\tau] - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Im}[J_{i\tau}[z]] \approx \frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}} \left(\frac{\tau^2}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{Sin}\left[\tau\,\xi[z,\tau] - \frac{\pi}{4}\right]$$

Ce qui donne une expression approchée du deuxième terme pour la fonction de Lommel de deuxième espèce :

$$\frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right]}{\text{Cosh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} \text{Re}[J_{i\tau}[z]] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right]}{\text{Sinh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} \text{Im}[J_{i\tau}[z]] \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{\tau^2}{\tau^2+z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2} - \tau\,\xi[z,\tau] + \frac{\pi}{4}\right] \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau}} \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2} - \tau\,\xi[z,\tau] + \frac{\pi}{4}\right]$$

Ou encore :

$$\tau\,\xi[z,\tau] \approx \tau\,\text{Log}\left[\frac{e z}{2\tau}\right] \Rightarrow \frac{\text{Re}[J_{i\tau}[z]]}{e^{\frac{\pi\tau}{2}}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau}} \text{Cos}\left[\tau\,\text{Log}\left[\frac{e z}{2\tau}\right] - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{\text{Im}[J_{i\tau}[z]]}{e^{\frac{\pi\tau}{2}}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau}} \text{Sin}\left[\tau\,\text{Log}\left[\frac{e z}{2\tau}\right] - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right] \frac{\text{Re}[J_{i\tau}[z]]}{\text{Cosh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} - \text{Cos}\left[\frac{\pi\mu}{2}\right] \frac{\text{Im}[J_{i\tau}[z]]}{\text{Sinh}\left[\frac{\pi\tau}{2}\right]} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau}} \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2} - \tau\,\text{Log}\left[\frac{e z}{2\tau}\right] + \frac{\pi}{4}\right]$$

Comme d'autre part on peut exprimer une expression asymptotique du terme en fonctions Gamma, il vient finalement l'expression asymptotique réduite au premier terme :

Comme : $\Gamma[z] \approx \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$ **et** $\text{Log}\left[\frac{1-\mu+i\tau}{1-\mu-i\tau}\right] \approx i\pi + 2i\frac{(\mu-1)}{\tau}$

Il vient :

$$\left|\Gamma\left[\frac{1-\mu-i\tau}{2}\right]\right|^2 \approx 2^{\mu+1}\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \tau^{-\mu} \quad \text{et} \quad \left|\Gamma\left[\frac{1+\mu-i\tau}{2}\right]\right|^2 \approx 2^{-\mu+1}\pi\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \tau^{\mu}$$

$$\Rightarrow S_{\mu,i\tau}[z] \approx \frac{z^{\mu+1}}{\tau^2+z^2} + \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \tau^{\mu-\frac{1}{2}} \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2} - \tau\,\xi[z,\tau] + \frac{\pi}{4}\right] \approx \frac{z^{\mu+1}}{\tau^2+z^2}$$

$$\Rightarrow S_{\mu,i\tau}[z] \approx \frac{z^{\mu+1}}{\tau^2+z^2} + \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \tau^{\mu-\frac{1}{2}} \text{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2} - \tau\,\text{Log}\left[\frac{e z}{2\tau}\right] + \frac{\pi}{4}\right] \approx \frac{z^{\mu+1}}{\tau^2+z^2}$$

Fonctions modifiées de Lommel de première et deuxième espèce :

Fonctions modifiées de Lommel à valeur complexe (voir article de 1936 P.Szymanski, « On the Integral Representations of the Lommel Functions ») et fonctions modifiées régulières en 0 :

$$\text{Solution de l'équation différentielle de Bessel modifiée inhomogène} \quad z^2y''+zy'+\left(z^2+\nu^2\right)y=z^{\mu+1} \rightarrow \begin{cases} t_{\mu,\nu}(z)=-i^{1-\mu}s_{\mu,\nu}(iz) \\ T_{\mu,\nu}(z)=-i^{1-\mu}S_{\mu,\nu}(iz) \end{cases}$$

$$t_{\mu,\nu}(z)=-i^{1-\mu}s_{\mu,\nu}(iz)=e^{i\pi\frac{3-\mu}{2}}s_{\mu,\nu}(iz) \Rightarrow t_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu+1}\frac{{}_1F_2\left(1;\frac{\mu+\nu+3}{2},\frac{\mu-\nu+3}{2};\frac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2-\nu^2}=z^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{z^{2l}}{a_l(\mu,\nu)} \quad avec \quad a_l(\mu,\nu)=\prod_{m=1}^{m=l}\left((\mu+2m-1)^2-\nu^2\right)$$

$$T_{\mu,\nu}(z)=t_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{e^{i\pi}e^{-i\pi\frac{\nu}{2}}J_\nu(iz)+ie^{i\pi\frac{3-\mu}{2}}Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)H_\nu^{(1)}(iz)\right\}$$

$$T_{\mu,\nu}(z)=t_{\mu,\nu}(z)-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{I_\nu(z)+\frac{2}{\pi}K_\nu(z)e^{i\pi\frac{1-\mu-\nu}{2}}Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)\right\} \Leftarrow \begin{cases} I_\nu(z)=e^{-i\pi\frac{\nu}{2}}J_\nu(iz) \\ K_\nu(z)=\frac{i\pi}{2}e^{i\pi\frac{\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(iz)=\frac{\pi\left(I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right)}{2Sin(\pi\nu)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow T_{\mu,\nu}(z)=t_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^{i\pi\frac{1-\mu+\nu}{2}}I_\nu(z)-Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{i\pi\frac{1-\mu-\nu}{2}}I_{-\nu}(z)\right\} \Leftarrow \begin{cases} I_\nu(z)=e^{-i\pi\frac{\nu}{2}}J_\nu(iz) \\ I_{-\nu}(z)=e^{i\pi\frac{\nu}{2}}J_{-\nu}(iz) \end{cases}$$

$$t_{\mu,\nu}^{regular}(z)=t_{\mu,\nu}(z) \qquad et \qquad T_{\mu,\nu}^{regular}(z)=t_{\mu,\nu}(z)-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)I_\nu(z)$$

Si les ordres μ et ν sont réels alors les fonctions régulières en 0 définies ainsi sont réelles.

*Liens avec les fonctions modifiées de Struve **L** et **M** :*

$$\mathbf{L}_\nu(z)=-ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\mathbf{H}_\nu(iz)=-i^{1-\nu}\mathbf{H}_\nu(iz) \qquad -i^{1-\nu}\mathbf{K}_\nu(iz)=\mathbf{L}_\nu(z)+i^{1-\nu}Y_\nu(iz) \qquad \mathbf{M}_\nu(z)=\mathbf{L}_\nu(z)-I_\nu(z)$$

$$\mu=\nu\rightarrow\begin{cases} s_{\nu,\nu}(z)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)\Rightarrow t_{\nu,\nu}(z)=-i^{1-\nu}s_{\nu,\nu}(iz)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(-i^{1-\nu}\mathbf{H}_\nu(iz)\right)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{L}_\nu(z) \\ S_{\nu,\nu}(z)=\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{K}_\nu(z)\Rightarrow T_{\nu,\nu}(z)=-i^{1-\nu}S_{\nu,\nu}(iz)=-i^{1-\nu}\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{K}_\nu(iz) \\ T_{\nu,\nu}(z)=t_{\nu,\nu}(z)-2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left\{I_\nu(z)+\frac{2}{\pi}K_\nu(z)\left\{Sin(\pi\nu)+iCos(\pi\nu)\right\}\right\}\Leftarrow I_\nu(z)+\frac{2}{\pi}K_\nu(z)Sin(\pi\nu)=I_{-\nu}(z) \\ \Rightarrow T_{\nu,\nu}(z)=t_{\nu,\nu}(z)-2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left\{I_{-\nu}(z)+\frac{2i}{\pi}K_\nu(z)Cos(\pi\nu)\right\} \\ \Rightarrow T_{\nu,\nu}(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left\{\mathbf{L}_\nu(z)-I_{-\nu}(z)-\frac{2i}{\pi}K_\nu(z)Cos(\pi\nu)\right\} \\ \Rightarrow T_{\nu,\nu}(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left\{\mathbf{M}_\nu(z)-\frac{2}{\pi}K_\nu(z)Sin(\pi\nu)-\frac{2i}{\pi}K_\nu(z)Cos(\pi\nu)\right\} \end{cases}$$

Il s'ensuit que les parties régulières en 0 des fonctions modifiées de Lommel sont proportionnelles aux fonctions modifiées de Struve :

$$\mathbf{M}_\nu(z) = \mathbf{L}_\nu(z) - I_\nu(z)$$

$$\mu = \nu \rightarrow \begin{cases} t_{\nu,\nu}^{regular}(z) = t_{\nu,\nu}(z) = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\mathbf{L}_\nu(z) \\ T_{\nu,\nu}^{regular}(z) = t_{\nu,\nu}(z) - 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)I_\nu(z) = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\mathbf{M}_\nu(z) \end{cases}$$

Fonctions modifiées de Lommel à valeur réelle, (voir également article de 1964, C.N.Rollinger « Lommel functions with imaginary argument »)

Développons la partie réelle des fonctions introduites précédemment :

Solution de l'équation différentielle de Bessel modifiée inhomogène $z^2 y'' + z y' + \left(z^2 + \nu^2\right) y = z^{\mu+1} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{t_{\mu,\nu}(z)\} \\ \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} \end{cases}$

$$\mathrm{Re}\{t_{\mu,\nu}(z)\} = -i^{1-\mu} s_{\mu,\nu}(iz) = e^{i\pi\frac{3-\mu}{2}} s_{\mu,\nu}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}\{t_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu+1} \frac{{}_1F_2\left(1; \frac{\mu+\nu+3}{2}, \frac{\mu-\nu+3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2 - \nu^2}$$

Travaillons sur la partie réelle de $T_{\mu,\nu}(z)$

$$\begin{cases} T_{\mu,\nu}(z) = t_{\mu,\nu}(z) - 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{I_\nu(z) + \frac{2}{\pi}K_\nu(z) e^{i\pi\frac{1-\mu-\nu}{2}} Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)\right\} \\ \Rightarrow \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) - 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)\left\{I_\nu(z) + \frac{2}{\pi}Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)Sin\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)K_\nu(z)\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{\mu,\nu}(z) = t_{\mu,\nu}(z) + 2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^{i\pi\frac{1-\mu+\nu}{2}}I_\nu(z) - Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{i\pi\frac{1-\mu-\nu}{2}}I_{-\nu}(z)\right\} \\ \Rightarrow \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) + 2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)I_\nu(z) - Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)I_{-\nu}(z)\right\} \\ \Rightarrow \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) + 2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{Sin(\pi\nu)}\left\{Cos\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)Sin\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)I_\nu(z) - Cos\left(\pi\frac{\mu-\nu}{2}\right)Sin\left(\pi\frac{\mu+\nu}{2}\right)I_{-\nu}(z)\right\} \end{cases}$$

<u>Comportement asymptotique de la partie réelle de la fonction modifiée de Lommel de deuxième espèce z ->∞</u>

$$\begin{cases} T_{\mu,\nu}(z) = -i^{1-\mu} S_{\mu,\nu}(iz) \\ S_{\mu,\nu}(z) \approx z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; -\frac{4}{z^2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{\mu,\nu}(z) \approx -i^{1-\mu} i^{\mu-1} z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; \frac{4}{z^2}\right) \approx -z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; \frac{4}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} \approx T_{\mu,\nu}(z) \approx -z^{\mu-1} \sum_{l=0}^{l=+\infty} a_l(-\mu,\nu) z^{-2l} \qquad a_0(-\mu,\nu) = 1 \qquad a_l(-\mu,\nu) = \prod_{m=1}^{m=l} \left((2m-1-\mu)^2 - \nu^2\right)$$

Comme l'usage de la fonction hypergéométrique 3F0 est à prendre avec des pincettes, il y a identification des développements à l'infini dans les deux cas cités auparavant : soit (μ-ν) soit (μ+ν) est un entier impair strictement positif, et l'on a le développement en série licite et convergent autour de ∞ :

$$Si \quad \mu+\nu = 2p+1 \qquad ou \qquad \mu-\nu = 2p+1$$

$$Comme \qquad T_{\mu,\nu}(z) = -z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; \frac{4}{z^2}\right)$$

$$Si \quad \mu-\nu = 2p+1 \Rightarrow T_{\mu,\nu}(z) = \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) - 2^{\mu-1} p!\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right) I_\nu(z) = -z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; \frac{4}{z^2}\right)$$

$$Si \quad \mu+\nu = 2p+1 \Rightarrow T_{\mu,\nu}(z) = \mathrm{Re}\{T_{\mu,\nu}(z)\} = t_{\mu,\nu}(z) - 2^{\mu-1} p!\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right) I_{-\nu}(z) = -z^{\mu-1} {}_3F_0\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, 1;; \frac{4}{z^2}\right)$$

<u>*Comportement asymptotique uniforme de la fonction modifiée de Lommel de première espèce lorque ν ->∞*</u>

Dans l'ouvrage de 1974 de F.W.J.Olver, W.Rheinbolt « Asymptotics and Special Functions » en pages 388-390 formules 11.01, 11.02, 11.03, 11.04 et suivantes (prendre m=μ+1 et z pour ζ=z/ν), les auteurs donnent en exemple la construction d'un développement asymptotique uniforme de la fonction de Lommel modifiée. Après identification par tâtonnement il s'agit de bien de la fonction de première espèce. En l'occurence la construction est la suivante :

$$G_0(\mu,\nu,\zeta)=-\frac{\zeta^{\mu+1}}{1+\zeta^2}\qquad G_l(\mu,\nu,\zeta)=\frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+\frac{\zeta}{1+\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}G_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)\qquad pour\quad l>0$$

$$\Rightarrow t_{\mu,\nu}(z)\approx\nu^{\mu-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{G_l\left(\mu,\nu,\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}$$

$$Avec\quad G_0(\mu,\nu,\zeta)=-\frac{\zeta^{\mu+1}}{1+\zeta^2}\qquad G_1(\mu,\nu,\zeta)=\zeta^{\mu+1}\left\{\frac{-(1+\mu)^2+2\zeta^2(3-\mu^2)-\zeta^4(1-\mu)^2}{(1+\zeta^2)^4}\right\}$$

$$G_2(\mu,\nu,\zeta)=\zeta^{\mu+1}\left\{\frac{-(1+\mu)^4+4\zeta^2(7+2\mu-\mu^2)-2\zeta^4(175+34\mu-38\mu^2-6\mu^3+3\mu^4)+4\zeta^6(49-39\mu+2\mu^2+5\mu^3-\mu^4)-\zeta^8(\mu-1)^2(\mu-3)^2}{(1+\zeta^2)^7}\right\}$$

$$En\ posant\qquad G_l(\mu,\nu,\zeta)=\zeta^{\mu+1}\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)$$

$$\Rightarrow G_l(\mu,\nu,\zeta)=\zeta^{\mu+1}\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)=\frac{\zeta^{\mu+1}}{1+\zeta^2}\left\{(\mu+1)^2\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+(2\mu+3)\zeta\frac{d}{d\zeta}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+\zeta^2\frac{d^2}{d\zeta^2}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)=\dfrac{(\mu+1)^2\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+(2\mu+3)\zeta\dfrac{d}{d\zeta}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)+\zeta^2\dfrac{d^2}{d\zeta^2}\widetilde{G}_{l-1}(\mu,\nu,\zeta)}{1+\zeta^2}\\[2ex] t_{\mu,\nu}(z)\approx\nu^{\mu-1}\zeta^{\mu+1}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l(\mu,\nu,\zeta)}{\nu^{2l}}\quad avec\quad\zeta=\frac{z}{\nu}\quad\Rightarrow\quad t_{\mu,\nu}(z)\approx\frac{z^{\mu+1}}{\nu^2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{G}_l\left(\mu,\nu,\frac{z}{\nu}\right)}{\nu^{2l}}\end{cases}$$

$$Avec\quad\widetilde{G}_0(\mu,\nu,\zeta)=-\frac{1}{1+\zeta^2}\qquad\widetilde{G}_1(\mu,\nu,\zeta)=\frac{-(1+\mu)^2+2\zeta^2(3-\mu^2)-\zeta^4(1-\mu)^2}{(1+\zeta^2)^4}$$

$$\widetilde{G}_2(\mu,\nu,\zeta)=\frac{-(1+\mu)^4+4\zeta^2(7+2\mu-\mu^2)-2\zeta^4(175+34\mu-38\mu^2-6\mu^3+3\mu^4)+4\zeta^6(49-39\mu+2\mu^2+5\mu^3-\mu^4)-\zeta^8(\mu-1)^2(\mu-3)^2}{(1+\zeta^2)^7}$$

Par déduction, il est possible de trouver le comportement asymptotique de la fonction de Lommel de première espèce (voir plus haut) .

Fonctions modifiées de Lommel de paramètre ν=iτ purement imaginaire

La fonction modifiée de première espèce est à valeur réelle lorsque l'argument est réelle :

$$t_{\mu,i\tau}(z)=z^{\mu+1}\frac{{}_1F_2\left(1;\frac{\mu+i\tau+3}{2},\frac{\mu-i\tau+3}{2};\frac{z^2}{4}\right)}{(\mu+1)^2+\tau^2}=z^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{z^{2l}}{a_l(\mu,\tau)}\quad avec\quad a_l(\mu,\tau)=\prod_{m=1}^{m=l}\left((\mu+2m-1)^2+\tau^2\right)$$

Quant à la fonction modifiée de deuxième espèce elle n'est pas à valeur réelle lorsque l'argument est réelle :

$$T_{\mu,i\tau}(z)=t_{\mu,i\tau}(z)-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)\left\{I_{i\tau}(z)+\frac{2}{\pi}K_{i\tau}(z)e^{i\pi\frac{1-\mu-i\tau}{2}}Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)\right\}$$

$$Or\quad I_{i\tau}(z)=\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}+i\,\mathrm{Im}\{I_{i\tau}(z)\}\quad et\quad \mathrm{Im}\{I_{i\tau}(z)\}=-\frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}K_{i\tau}(z)$$

$$\Rightarrow I_{i\tau}(z)+\frac{2}{\pi}K_{i\tau}(z)e^{i\pi\frac{1-\mu-i\tau}{2}}Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)=\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}-i\frac{Sinh(\pi\tau)}{\pi}K_{i\tau}(z)$$

$$+\frac{2}{\pi}K_{i\tau}(z)\left\{Sin\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)+iCos\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)\right\}Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}+\frac{K_{i\tau}(z)}{\pi}\left(2Sin\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)-iSinh(\pi\tau)\right)$$

$$+\frac{2i}{\pi}K_{i\tau}(z)Cos\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)$$

$$De\ plus\quad Sin\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)-Cos\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)Sin\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)=iSinh(\pi\tau)$$

$$Et\quad 2Cos\left(\pi\frac{\mu+i\tau}{2}\right)Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)=Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)$$

$$\Rightarrow I_{i\tau}(z)+\frac{2}{\pi}K_{i\tau}(z)e^{i\pi\frac{1-\mu-i\tau}{2}}Cos\left(\pi\frac{\mu-i\tau}{2}\right)=\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}+\frac{Sin(\pi\mu)}{\pi}K_{i\tau}(z)+i\frac{Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)}{\pi}K_{i\tau}(z)$$

$$T_{\mu,i\tau}(z)=\begin{cases}t_{\mu,i\tau}(z)-\\-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)\left\{\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}+\frac{Sin(\pi\mu)}{\pi}K_{i\tau}(z)+i\frac{Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)}{\pi}K_{i\tau}(z)\right\}\end{cases}$$

La partie imaginaire de la fonction modifiée de Lommel de deuxième espèce est donc proportionnelle à la fonction de Bessel K d'ordre purement imaginaire. La partie réelle de la fonction modifiée de Lommel de deuxième espèce est plus intéressante :

$$\mathrm{Re}\{T_{\mu,i\tau}(z)\}=t_{\mu,i\tau}(z)-2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-i\tau}{2}\right)\left\{\mathrm{Re}\{I_{i\tau}(z)\}+\frac{Sin(\pi\mu)}{\pi}K_{i\tau}(z)\right\}$$

Des transformations intégrales et leur inversion qui fonctionnent plus ou moins bien numériquement

Le but ici est d'illustrer certaines généralisations de la transformation intégrale de Kontorovich-Lebedev, notamment avec les fonctions de Bessel J d'ordre imaginaire, ou bien encore les fonctions de Whittaker W.

Certaines formules de Titchmarsh, 1962, dans « Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part 1 », page 95, formules 4.14.1 et 4.14.2 (il suffit de changer g(x)=xf(x) et √λ=τ , u=γx, v=γy) se présentent comme suit :

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}4nJ_{2n}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\,\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\,\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

$$(2)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}(4n+2)J_{2n+1}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n+1}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\,\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\,\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

La transformation se présente donc avec un terme de spectre continu et un terme de spectre discret, notons les comme suit : $f(x)=\underbrace{w(x)}_{terme\ discret}+\underbrace{\tilde{f}(x)}_{terme\ continu}$.

La représentation de ces transformations intégrales sous cette forme présente un meilleure stabilité numérique.

Par contre lorsque les formules précédentes s'écrivent sous la forme :

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}4nJ_{2n}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\ \ \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

$$(2)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}(4n+2)J_{2n+1}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n+1}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\ \ \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

Alors l'instabilité numérique dans le calcul est plus manifeste en général.

Plus généralement, S.B. Yakubovich 1997 « Index integral transformations of Titchmarsh type » et 1998, « The Titchmarsh integral transformation by the index of a Bessel function », écrit le couple de transformations (avec une valeur γ=1) pour une valeur du paramètre μ€[0,1] :

$$(3)\quad g(\tau)=\int_0^{+\infty}dy\, f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}\qquad f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 S_{\mu,i\tau}(x)g(\tau)$$

$$Or\quad S_{\mu,i\tau}(x)=s_{\mu,i\tau}(x)+2^{\mu-1}\left|\Gamma\left(\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(z)g(\tau)$$

$$+\frac{1}{2\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\left|\Gamma\left(\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}g(\tau)$$

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)g(\tau)+\frac{1}{2x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\tau Sinh(\pi\tau)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}}{Cos\left(\frac{\pi(\mu-i\tau)}{2}\right)Cos\left(\frac{\pi(\mu+i\tau)}{2}\right)}g(\tau)$$

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)g(\tau)+\frac{1}{2x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\tau Sinh(\pi\tau)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}}{Cos^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Cosh^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)+Sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Sinh^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}g(\tau)$$

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)g(\tau)+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\tau Sinh(\pi\tau)}{Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}g(\tau)$$

L'utilisation de la fonctions de Lommel de deuxième espèce introduit de fortes instabilités numériques que l'on a pas dans les formules originales de Titchmarsh. Exprimons la formule de Yakubovich sous une forme permettant de revenir aux formules de Titchmarsh, il vient :

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}+$$

$$+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\tau Sinh(\pi\tau)}{Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

Pour éviter là encore des instabilités numériques j'ai remarqué que les expressions suivantes sont plus commodes :

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}+$$

$$+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\pi\ Sinh(\pi\tau)}{2\left(Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau)\right)}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\,\tau\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

Mais attention ce n'est pas vraiment sous cette forme que j'ai testé sa validité car elle présente un aspect divergent sur le terme comportant la fonction de Lommel de première espèce. Pour « régulariser » ce terme, il sera transformé en un terme discret par l'utilisation du développement de la fonction de Lommel de première espèce et l'intervention de la transformée de Laplace de la fonction f(x).

Pour μ=0, on trouve l'expression (et son équivalent plus stable):

$$f(x)=-\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau s_{0,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \ \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau s_{0,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

Pour μ=1, on trouve l'expression (et son équivalent plus stable):

$$f(x)=\frac{1}{2\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\frac{Sinh(\pi\tau)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\left|\Gamma\left(\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{1,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \ \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \ s_{1,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \ \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \ s_{1,i\tau}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\sqrt{\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

En développant la fonction de Lommel de première espèce en série dans les premiers termes des membres droit des expressions, on retrouve les formules de Titchmarsh :

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}4nJ_{2n}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\ \ \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

$$(2)\quad f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n=+\infty}(4n+2)J_{2n+1}(\gamma x)\int_0^{+\infty}dyJ_{2n+1}(\gamma y)f(y)+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\pi\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma x)\}\int_0^{+\infty}dy\ \ \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(\gamma y)\}f(y)$$

En effet utilisons deux résultats, sous certaines conditions de convergence d'intégrales (voir les articles de S. Yakubovich) :

$$\text{Transformée de Laplace de } J_{i\tau}(x) \to \int_0^{+\infty} dy\, e^{-py} J_{i\tau}(y) = \frac{e^{-i\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)}}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} dy\, e^{-py}\, \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\} = \frac{Cos\left(\tau\, Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{\sqrt{p^2+1}} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} dy\, e^{-py}\, \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\} = -\frac{e^{i\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)} - e^{-i\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)}}{2i\sqrt{p^2+1}} = -\frac{Sin\left(\tau\, Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{\sqrt{p^2+1}} \end{cases}$$

$$\text{Identités restreintes aux fonctions } Re\{J_{i\tau}(y)\} \text{ et } Im\{J_{i\tau}(y)\} \quad et \quad J_\nu(y)$$

$$Si \begin{cases} g(\tau) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dy\, f(y)\, \mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\} \\ ou \quad g(\tau) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dy\, f(y)\, \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\} \\ ou \quad g(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dy\, f(y) J_\nu(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\tau) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dp\, \frac{Cos\left(\tau\, Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{\sqrt{p^2+1}} h(p) \\ ou \quad g(\tau) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} dp\, \frac{Sin\left(\tau\, Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{\sqrt{p^2+1}} h(p) \\ ou \quad g(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dp\, \frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^\nu} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad h(p) \text{ est "l'inverse" de la transformée de Laplace de } f \to f(x) = \int_0^{+\infty} dp\, e^{-xp} h(p)$$

Les deux développements en série des fonctions de Lommel de première espèce sont les suivants :

$$s_{0,i\tau}(x) = 2\sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{(2l+1)}{(2l+1)^2+\tau^2} J_{2l+1}(x) \qquad s_{1,i\tau}(x) = 8\sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{l^2}{4l^2+\tau^2} J_{2l}(x)$$

Injectons ces deux développements dans les deux expressions obtenues, et l'on retrouve bien les formules de Titchmarsh :

$$\text{Intégrale}\quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(a\tau)}{l^2+\tau^2} = \frac{\pi e^{-al}}{2l} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau Sin(a\tau)}{l^2+\tau^2} = -\frac{\pi}{2l}\frac{d}{da}\left\{e^{-al}\right\} = \frac{\pi}{2}e^{-al}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{\pi x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau \frac{(2l+1)}{(2l+1)^2+\tau^2} J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty} dp\ \frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\int_0^{+\infty} d\tau\ \frac{\tau Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1)^2+\tau^2} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\ Sin(a\tau)}{(2l+1)^2+\tau^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a(2l+1)} \Rightarrow a = Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right) \to \int_0^{+\infty} d\tau\ \frac{\tau Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1)^2+\tau^2} = \frac{\pi}{2}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-(2l+1)}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty} dp\ \frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-(2l+1)} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\text{Transformée de Laplace de } J_{2l+1}(x) \to \int_0^{+\infty} dy\ e^{-py}J_{2l+1}(y) = \frac{\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-(2l+1)}}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty} dy J_{2l+1}(y)\int_0^{+\infty} dp\ h(p)e^{-py} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(4l+2)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty} dy J_{2l+1}(y)f(y) + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{16}{\pi x}\sum_{l=1}^{l=+\infty}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{l^2}{4l^2+\tau^2} J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{16}{\pi x}\sum_{l=1}^{l=+\infty} l^2 J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} d\tau \frac{1}{4l^2+\tau^2}\int_0^{+\infty} dp\ \frac{Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{\sqrt{p^2+1}}h(p) + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{16}{\pi x}\sum_{l=1}^{l=+\infty} l^2 J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} dp \frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{4l^2+\tau^2} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(a\tau)}{4l^2+\tau^2} = \frac{\pi e^{-2al}}{4l} \Rightarrow a = Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right) \to \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{4l^2+\tau^2} = \frac{\pi\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-2l}}{4l}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x}\sum_{l=1}^{l=+\infty} l J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} dp \frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-2l} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$\text{Transformée de Laplace de } J_{2l}(x) \to \int_0^{+\infty} dy\ e^{-py}J_{2l}(y) = \frac{\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-2l}}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x}\sum_{l=1}^{l=+\infty} l J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} dp h(p)\int_0^{+\infty} dy\ e^{-py}J_{2l}(y) + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x}\sum_{l=1}^{l=+\infty} l J_{2l}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)J_{2l}(y) + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} d\tau \quad \frac{\tau}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(z))\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}$$

.

Avec un paramètre μ €[0,1] quelconque il faudrait exprimer le terme discret w(x) :

$$w(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow w(x)=\frac{2^{1-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\left\{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

sous la forme d'une somme de fonction de Bessel d'ordre réel, injectons le développement de la fonction de Lommel de première espèce en fonctions de Bessel et appliquons une transformation de Laplace sur les parties réelles et imaginaires des fonctions de Bessel :

$$s_{\mu,i\tau}(x)=2^{\mu+1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!\left((2l+\mu+1)^2+\tau^2\right)}J_{2l+\mu+1}(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{2}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{2}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}\left\{\begin{array}{l}Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)+\\+Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)\end{array}\right\}h(p)$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\left\{\begin{array}{l}Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)+\\+Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)\end{array}\right\}$$

On note ainsi les intégrales :

$$I_l=\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\left\{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)+Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)I_l$$

Et l'on constate que numériquement le terme w(x) comporte « disons moins » d'instabilité numérique.

Pour les valeurs μ=0 et μ=1, cela donne :

$$\mu=0\Rightarrow w(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\pi\tau\ Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1)^2+\tau^2}$$

$$\mu=1\Rightarrow\begin{cases} w(x)=\dfrac{8}{\pi^2 x}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}(l+1)^2 J_{2l+2}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{2\pi\ Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+2)^2+\tau^2} \\ \Rightarrow w(x)=\dfrac{8}{\pi^2 x}\displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty}l^2 J_{2l}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{2\pi\ Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{4l^2+\tau^2}\end{cases}$$

que l'on doit comparer avec les développements suivants :

$$\mu=0\Rightarrow w(x)=\frac{2}{x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l+1}(y)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(2l+1)J_{2l+1}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\pi\tau\ Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1)^2+\tau^2}$$

$$\mu=1\Rightarrow w(x)=\frac{4}{x}\sum_{l=1}^{l=+\infty}lJ_{2l}(x)\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l}(y)=\frac{8}{\pi^2 x}\sum_{l=1}^{l=+\infty}l^2 J_{2l}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{2\pi\ Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{4l^2+\tau^2}$$

Soit l'évaluation numérique doit conduire aux identités terme à terme suivantes pour les deux cas μ=0 et μ=1 :

$$\mu=0\Rightarrow\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l+1}(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\tau\ Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1)^2+\tau^2}$$

$$\mu=1\Rightarrow\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l}(y)=\frac{4l}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{4l^2+\tau^2}$$

$$\mu=0\Rightarrow I_l=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l+1}(y)$$

$$\mu=1\Rightarrow I_l=\frac{\pi^2}{2l}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)J_{2l}(y)$$

Je résume ainsi une implémentation possible (peut-être plus stable numériquement) de la formule généralisée de Titchmarsh lorsque l'on connaît « l'inverse » de la transformée de Laplace de la fonction f(x) :

$$I_l=Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dp\ h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)+Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dp\ h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)$$

$$\text{où}\quad h(p)\ \text{est "l'inverse" de la transformée de Laplace de } f\rightarrow f(x)=\int_0^{+\infty}dp\ e^{-xp}h(p)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)I_l+$$

$$+\frac{2}{\pi\ x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \frac{\pi\ Sinh(\pi\tau)}{2(Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau))}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}\int_0^{+\infty}dy\ f(y)\tau\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

<u>Instabilité numérique de la transformation de Yakubovich-Titchmarsh</u>

La formule de Yakubovitch-Tichmarsh présente un gros inconvénient d'instabilité numérique dans on implémentation en effet en la forme :

$$\begin{cases} g(\tau)=\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\left\{\dfrac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\dfrac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\} \\ f(x)=\dfrac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)g(\tau) \end{cases}$$

Tandis que sous sa forme développée en deux termes, l'instabilité numérique est réglée moyennant le développement en série de la fonction de Lommel et un passage aux transformées de Laplace dans les intégrandes (voir ci-dessus) :

$$f(x)=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau Sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 s_{\mu,i\tau}(x)\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}+$$

$$+\frac{2}{\pi x}\int_0^{+\infty} d\tau\ \frac{\pi\ Sinh(\pi\tau)}{2(Cos(\pi\mu)+Cosh(\pi\tau))}\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}(J_{i\tau}(x))-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}(J_{i\tau}(x))\right\}\int_0^{+\infty} dy\ f(y)\tau\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(y)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(y)\}\right\}$$

Pour se convaincre de cette instabilité potentielle reprenons la première ou deuxième expression, et voyons avec le développement asymptotique au premier terme ce qui se passe avec les fonctions de Lommel soit de première, soit de deuxième espèce :

$$s_{\mu,\nu}(x)\approx-\frac{x^{\mu+1}}{\nu^2-x^2}\Rightarrow s_{\mu,i\tau}(x)\approx\frac{x^{\mu+1}}{\tau^2+x^2}$$

$$S_{\mu,i\tau}(x)=s_{\mu,i\tau}(x)+2^{\mu-1}\left|\Gamma\left(\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\left\{\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(x)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\right\}$$

$$Posons\quad \tau\xi(x,\tau)=\sqrt{\tau^2+x^2}+\tau Log\left(\frac{x}{\tau+\sqrt{\tau^2+x^2}}\right)$$

$$\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(x)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+x^2}\right)^{\frac{1}{4}}Cos\left(\tau\xi(x,\tau)-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\approx\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+x^2}\right)^{\frac{1}{4}}Sin\left(\tau\xi(x,\tau)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Re}\{J_{i\tau}(x)\}-\frac{Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\mathrm{Im}\{J_{i\tau}(x)\}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}-\tau Log\left(\frac{ex}{2\tau}\right)+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\approx\pi 2^{\mu+1}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\tau^{-\mu}\qquad\left|\Gamma\left(\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2\approx\pi 2^{-\mu+1}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\tau^{\mu}$$

$$\Rightarrow S_{\mu,i\tau}(x)\approx\frac{x^{\mu+1}}{\tau^2+x^2}+e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\tau^{\mu}\sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}-\tau Log\left(\frac{ex}{2\tau}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\approx\frac{x^{\mu+1}}{\tau^2+x^2}$$

ce qui donne une estimation des intégrales :

$$f[x]=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^\infty d\tau\,\tau\,\mathrm{Sinh}[\pi\tau]\,\left|\Gamma\left[\frac{1+\mu+i\tau}{2}\right]\right|^2 S_{\mu,i\tau}[x]\int_0^\infty dy\,f[y]\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)$$

$$f[x]=w[x]+\tilde{f}[x]$$

$$w[x]=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_0^\infty d\tau\,\tau\,\mathrm{Sinh}[\pi\tau]\,\left|\Gamma\left[\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right]\right|^2 s_{\mu,i\tau}[x]\int_0^\infty dy\,f[y]\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)$$

$$\tilde{f}[x]=\frac{1}{x}\int_0^\infty d\tau\,\frac{\tau\,\mathrm{Sinh}[\pi\tau]}{\mathrm{Cosh}[\pi\mu]+\mathrm{Cosh}[\pi\tau]}\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)\int_0^\infty dy\,f[y]\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)$$

$$\tilde{f}[x,N]=\frac{1}{x}\int_N^\infty d\tau\,\frac{\tau\,\mathrm{Sinh}[\pi\tau]}{\mathrm{Cosh}[\pi\mu]+\mathrm{Cosh}[\pi\tau]}\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)\int_0^\infty dy\,f[y]\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)$$

$$\Rightarrow\tilde{f}[x,N]\approx\frac{2}{\pi x}\int_N^\infty d\tau\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}-\tau\,\xi[x,\tau]+\frac{\pi}{4}\right]\int_0^\infty dy\,f[y]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}-\tau\,\xi[y,\tau]+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$w[x,N]=\frac{2^{-\mu}}{\pi^2 x}\int_N^\infty d\tau\,\tau\,\mathrm{Sinh}[\pi\tau]\,\left|\Gamma\left[\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right]\right|^2 s_{\mu,i\tau}[x]\int_0^\infty dy\,f[y]\left(\frac{\mathrm{Sin}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Cosh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Re}[J_{i\tau}[y]]-\frac{\mathrm{Cos}[\frac{\pi\mu}{2}]}{\mathrm{Sinh}[\frac{\pi\tau}{2}]}\mathrm{Im}[J_{i\tau}[y]]\right)$$

$$\Rightarrow w[x,N]=\frac{\sqrt{2}\,x^{\mu}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_N^\infty d\tau\,\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}\,\tau^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\tau^2+x^2}\int_0^\infty dy\,f[y]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\mu}{2}-\tau\,\xi[y,\tau]+\frac{\pi}{4}\right]$$

On voit que les intégrandes du deuxième terme sont des fonctions bornées, et qu'il y a de bonne chance sans le démontrer formellement que les intégrales convergent rapidement. Mais pour le premier terme, l'intégrande en τ est une fonction exponentielle croissante de ce dernier rendant quasiment impossible un calcul numérique sans un processus de régularisation adéquat. C'est d'ailleurs celui que l'on réalise lorsque l'on substitue à la fonction de Lommel de première espèce sa représentation en série et que l'on change d'espace d'intégration avec les transformées de Laplace.

Avec l'expression modifiée du premier terme en prenant les variables d'intégration de Laplace, nous avons :

$$w(x)=\frac{4}{\pi^2 x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+\mu+1)\Gamma(l+\mu+1)}{l!}J_{2l+\mu+1}(x)\int_0^{+\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}h(p)\left\{\begin{aligned}&Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Cos\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)+\\&+Cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(2l+\mu+1)^2+\tau^2}Sin\left(\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)\end{aligned}\right\}$$

En restreignant l'intégration sur des valeurs suffisamment grande de τ de telle manière à appliquer les formules asymptotiques, il vient :

$$\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\approx 2^{\mu}\pi\tau^{-\mu}\qquad\left|\Gamma\left(\frac{1-\mu+i\tau}{2}\right)\right|^2 Cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\approx 2^{\mu}\pi\tau^{-\mu}$$

$$\Rightarrow W(x,N)\approx\frac{2^{\mu+2}}{\pi x}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(2l+1+\mu)}{l!}\Gamma(l+1+\mu)J_{2l+1+\mu}(x)\int_0^{+\infty}dp\,\frac{h(p)}{\sqrt{p^2+1}}\int_N^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau^{1-\mu}Sin\left(\frac{\pi\mu}{2}+\tau Log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\right)}{(2l+1+\mu)^2+\tau^2}$$

Expression qui a l'infime avantage de présenter des intégrandes bornées, et dont la dernière intégrales est elle même une fonction de τ probablement bornée lorsque le paramètre μ€[0,1].

<u>La transformation d'Al-Musallam, 2002, « A Modified and a finite Index Weber Transform » :</u>

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\,\tau \dfrac{Y_\tau(\tau a)J_\tau(\tau x) - J_\tau(\tau a)Y_\tau(\tau x)}{(J_\tau(\tau a))^2 + (Y_\tau(\tau a))^2}\tilde{f}(\tau, a) \\ \tilde{f}(\tau, a) = \int_a^{+\infty} dx \dfrac{x^2 - 1}{x}\{Y_\tau(\tau a)J_\tau(\tau x) - J_\tau(\tau a)Y_\tau(\tau x)\}f(x) \end{cases}$$

<u>L'identité de Hardy, 1926, R.G.Cooke « The Inversion Formulae of Hardy and Titchmarsh »</u>

$$\begin{cases} \tilde{f}(y) = \dfrac{1}{Sin(\pi\nu)}\int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\left\{Cos\left(\dfrac{\pi(\mu+\nu)}{2}\right)J_\nu(xy) - Cos\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)J_{-\nu}(xy)\right\} \\ \Leftrightarrow \tilde{f}(y) = \int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\left\{Cos\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)Y_\nu(xy) - Sin\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)J_\nu(xy)\right\} \\ \Leftrightarrow \tilde{f}(y) = \dfrac{2^{1-\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\mu-\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\{s_{\mu,\nu}(xy) - S_{\mu,\nu}(xy)\} \\ Puisque\quad S_{\mu,\nu}(xy) - s_{\mu,\nu}(xy) = -2^{\mu-1}\Gamma\left(\dfrac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\mu-\nu}{2}\right)\dfrac{\left\{Cos\left(\dfrac{\pi(\mu+\nu)}{2}\right)J_\nu(xy) - Cos\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)J_{-\nu}(xy)\right\}}{Sin(\pi\nu)} \\ f(x) = \dfrac{2^{1-\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\mu-\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty} dy\sqrt{xy}\,s_{\mu,\nu}(xy)\tilde{f}(y) \end{cases}$$

Une identité de Hardy équivalente :

$$En\ posant\ g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\quad et\quad \tilde{g}(y) = \frac{\tilde{f}(y)}{\sqrt{y}}\qquad \begin{cases} \tilde{g}(y) = \dfrac{1}{Sin(\pi\nu)}\int_0^{+\infty} dx\, x g(x)\left\{Cos\left(\dfrac{\pi(\mu+\nu)}{2}\right)J_\nu(xy) - Cos\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)J_{-\nu}(xy)\right\} \\ \Leftrightarrow \tilde{g}(y) = \int_0^{+\infty} dx\, x g(x)\left\{Cos\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)Y_\nu(xy) - Sin\left(\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right)J_\nu(xy)\right\} \\ g(x) = \dfrac{2^{1-\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\mu-\nu}{2}\right)}\int_0^{+\infty} dy\, y\,\tilde{g}(y)s_{\mu,\nu}(xy) \end{cases}$$

<u>Passage de l'identité de Hardy à des transformations intégrales connues</u>

La transformée de Hankel classique :

$$\mu = \nu - 1 + \varepsilon \Rightarrow \mu + \nu = 2\nu - 1 + \varepsilon \quad et \quad \left.\begin{array}{l} \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \dfrac{s_{\nu-1+\varepsilon,\nu}(x)}{\Gamma(\varepsilon)} = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)J_\nu(x) \\ \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \dfrac{s_{\nu-1+\varepsilon,\nu}(x)}{\Gamma\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)} = 2^{\nu-2}\Gamma(\nu)J_\nu(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\, J_\nu(xy) \\ f(x) = \dfrac{2^{2-\nu}}{\Gamma(\nu)} \displaystyle\int_0^{+\infty} dy \sqrt{xy}\, \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \dfrac{s_{\nu-1+\varepsilon,\nu}(xy)}{\Gamma\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)} \tilde{f}(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\, J_\nu(xy) \\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dy \sqrt{xy}\, J_\nu(x)\tilde{f}(y) \end{cases}$$

La transformée de Neumann-Struve :

$$\mu = \nu \Rightarrow s_{\mu,\mu}(x) = 2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\mu(x) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\, f(x)\sqrt{xy}\, Y_\mu(xy) \\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} dy \sqrt{xy}\, \tilde{f}(y)\mathbf{H}_\mu(x) \end{cases}$$

Une transformation due à Jet Wimp, 1964 « A class_of_integral_transforms », formules 4.10 et 4.11 page 37 :

$$\begin{cases} g(\tau)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|^{2}\int_0^{+\infty}dx\ W_{\mu,i\tau}(x)f(x) \\ f(x)=\frac{1}{\pi^2 x^2}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(2\pi\tau)W_{\mu,i\tau}(x)g(\tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\tau)=^{2}\int_0^{+\infty}dx\ W_{\mu,i\tau}(x)f(x) \\ f(x)=\frac{1}{\pi^2 x^2}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(2\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|W_{\mu,i\tau}(x)g(\tau) \end{cases}$$

Lorsque μ=0, on retrouve la transformation de Kontorovich-Lebedev :

$$Lorsque\ \mu=0 \Rightarrow \begin{cases} g(\tau)=\int_0^{+\infty}dx\ W_{0,i\tau}(x)f(x) \\ f(x)=\frac{1}{\pi^2 x^2}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(2\pi\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\right|^{2}W_{0,i\tau}(x)g(\tau) \end{cases} \qquad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\right|^{2}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\quad et\quad W_{0,i\tau}(x)=\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_{i\tau}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(\tau)=\int_0^{+\infty}dx\ \sqrt{\frac{x}{\pi}}K_{i\tau}\left(\frac{x}{2}\right)f(x) \\ f(x)=\frac{2}{\pi\ x^2}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(\pi\tau)\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_{i\tau}\left(\frac{x}{2}\right)g(\tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\pi}\,g(\tau)=\int_0^{+\infty}dx\ K_{i\tau}(x)2\sqrt{2x}\,f(2x) \\ 2\sqrt{2x}\,f(2x)=\frac{2}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\sqrt{\pi}\,g(\tau) \end{cases}$$

$$Posons\quad h(x)=2\sqrt{2x}\,f(2x)\quad et\quad \widetilde{h}(\tau)=\sqrt{\pi}\,g(\tau) \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{h}(\tau)=\int_0^{+\infty}dx\ K_{i\tau}(x)h(x) \\ h(x)=\frac{2}{\pi^2 x}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sinh(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\widetilde{h}(\tau) \end{cases}$$

Une transformation de Noyau une fonction hypergéométrique diversement décrite dans plusieurs articles

Les articles les plus précis et « concordant » quant à la forme sont les suivants :

Dans l'article de 2001 de Y.A.Neretin « Index hypergeometric transform and imitation of analysis of Berezin kernels » , ainsi que dans son article de 2012 « Index hypergeometric integral transform », elle est décrite avec divers facteur multiplicatif qui une fois corrigé et testé numériquement donne ceci :

$$\begin{cases} g(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(b+c)} \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -x \right) \\ f(x) = \dfrac{1}{2\pi \Gamma(b+c)} \displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau) \left| \dfrac{\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -x \right) \end{cases}$$

On peut donner une forme similaire :

$$Comme \quad |\Gamma(2i\tau)|^2 = \frac{\Gamma(2i\tau)\Gamma(1-2i\tau)}{-2i\tau} = \frac{\pi}{2\tau\, Sin(2\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(b+c)} \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -x \right) \\ f(x) = \dfrac{1}{\pi^2 \Gamma(b+c)} \displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\, Sin(2\pi\tau) g(\tau) |\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)|^2 {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -x \right) \end{cases}$$

Dans l'article de 2006 de S.Yakubovich « ON THE PLANCHEREL THEOREM FOR THE OLEVSKII TRANSFORM » , les deux expressions 1.1 et 2.2 utilisées sont les suivantes :

$$\begin{cases} (2.2) \qquad g(\tau) = \dfrac{|\Gamma(c-a+i\tau)|^2}{2\pi \Gamma(c) |\Gamma(2i\tau)|^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x) x^{-a-1} (1+x)^{2a-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+i\tau, a-i\tau \\ c \end{matrix}, -\frac{1}{x} \right) \\ (1.1) \qquad f(x) = \dfrac{x^{-a}}{\Gamma(c)} \displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau) |\Gamma(a+i\tau)|^2 {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+i\tau, a-i\tau \\ c \end{matrix}, -\frac{1}{x} \right) \end{cases}$$

Ces deux systèmes de transformation sont bien équivalents. En effet :

$$\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x)x^{-a-1}(1+x)^{2a-c}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+i\tau,a-i\tau\\ c\end{matrix},-\dfrac{1}{x}\right) \\ f(x)=\dfrac{x^{-a}}{2\pi\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau)\dfrac{\left|\Gamma(a+i\tau)\Gamma(c-a+i\tau)\right|^2}{\left|\Gamma(2i\tau)\right|^2}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+i\tau,a-i\tau\\ c\end{matrix},-\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$$

$$Posons\quad y=\frac{1}{x}\Rightarrow dx=-\frac{dy}{y^2}\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dy\ f\left(\dfrac{1}{y}\right)y^{c-2a}y^{a-1}(1+y)^{2a-c}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+i\tau,a-i\tau\\ c\end{matrix},-y\right) \\ f\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{y^{a}}{2\pi\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau)\dfrac{\left|\Gamma(a+i\tau)\Gamma(c-a+i\tau)\right|^2}{\left|\Gamma(2i\tau)\right|^2}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a+i\tau,a-i\tau\\ c\end{matrix},-y\right)\end{cases}$$

$$Posons\quad\begin{cases} h(y)=y^{-a}f\left(\dfrac{1}{y}\right) \\ c\to b+c \\ a\to b \\ 2a-c\to b-c \\ c-a\to c \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dy\ h(y)y^{b+c-1}(1+y)^{b-c}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-y\right) \\ h(y)=\dfrac{1}{2\pi\Gamma(c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau)\dfrac{\left|\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2}{\left|\Gamma(2i\tau)\right|^2}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-y\right)\end{cases}$$

E.C.Titchmarsh en pages 101-102 de son ouvrage « Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part 1» datant de 1949 dans sa première version, donne la transformation suivante :

$$r(x)=\frac{1}{(Sinh(x))^{\frac{1}{2}\alpha}}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\gamma}\qquad \eta_1(x,\lambda)=r(x)^{-1}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\alpha+i\sqrt{\lambda},\frac{1}{2}\alpha-i\sqrt{\lambda}\\ \gamma\end{matrix},-Sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\begin{cases} g(\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x)\eta_1(x,\lambda) \\ f(x)=\dfrac{1}{2^{\alpha+2}\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\ g(\lambda)\left|\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+i\sqrt{\lambda}\right)\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\alpha+i\sqrt{\lambda}\right)}{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(2i\sqrt{\lambda}\right)}\right|^2\eta_1(x,\lambda)\end{cases}$$

Avec les transformations suivantes ce système est bien équivalent à celui donné par Neretin :

$$\tau = \sqrt{\lambda} \to \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 2d\tau \qquad b = \frac{1}{2}\alpha \qquad \gamma = b + c$$

$$y = Sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = Cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow dy = Sinh\left(\frac{x}{2}\right)Cosh\left(\frac{x}{2}\right)dx = y^{\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}dx \qquad Cosh\left(\frac{x}{2}\right) = (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow r(x) = 2^{-b} Sinh\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-b-c}\left(Cosh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{c-b-\frac{1}{2}} = 2^{-b} y^{\frac{1}{4}-\frac{b+c}{2}}(1+y)^{\frac{c-b}{2}-\frac{1}{4}} = r(y) \Rightarrow r(y)^{-2} = 2^{2b} y^{b+c-\frac{1}{2}}(1+y)^{b-c+\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(\tau) = \dfrac{1}{2^{2b}\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dy\ \{f(y)r(y)\} r(y)^{-2} y^{-\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -y\right) \\ f(y)r(y) = \dfrac{1}{2\pi\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau)\left|\dfrac{\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -y\right) \end{cases} \qquad f(y)r(y) \to f(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dy\ f(y) y^{b+c-1}(1+y)^{b-c}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -y\right) \\ f(y) = \dfrac{1}{2\pi\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ g(\tau)\left|\dfrac{\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 {}_2F_1\left(\begin{matrix} b+i\tau, b-i\tau \\ b+c \end{matrix}, -y\right) \end{cases}$$

Voici également deux publications faisant état d'une transformation intégrale dîtes de Fourier-Jacobi, ou Jacobi tout court : 1974, T.Koornwinder, « A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform », 1977, Y.Hasegawa, « On the integrability of Fourier-Jacobi transforms » présentant la transformation suivante et son inversion :

$$\begin{cases} F_{\alpha,\beta}(\lambda) = \dfrac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)} 2^{2(\alpha+\beta+1)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x)\left\{\begin{matrix} (Sinh(x))^{2\alpha+1}(Cosh(x))^{2\beta+1} \times \\ \times {}_2F_1\left(\begin{matrix} \dfrac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2} \\ \alpha+1 \end{matrix}, -(Sinh(x))^2\right) \end{matrix}\right\} \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)} 2^{-2(\alpha+\beta+1)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\lambda\ F_{\alpha,\beta}(\lambda)\left\{\begin{matrix} \left|\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta+1+i\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)}\right|^2 \times \\ \times {}_2F_1\left(\begin{matrix} \dfrac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2} \\ \alpha+1 \end{matrix}, -(Sinh(x))^2\right) \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

Là encore c'est la même transformation décrite par Olevskiy, puis Neretin et d'autres chercheurs cités dans ce document :

$$\left|\Gamma\left(\frac{i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)\right|^2=\frac{4\pi^2}{\lambda Sin(\pi\lambda)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)4\pi^2}2^{-2(\alpha+\beta+1)}\int_0^{+\infty}d\lambda\ \lambda Sin(\pi\lambda)g(\lambda)\left\{\begin{array}{l}\left|\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta+1+i\lambda}{2}\right)\right|^2\times\\ \times{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2},\frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}\\ \alpha+1\end{array},-(Sinh(x))^2\right)\end{array}\right\}$$

Avec les substitutions suivantes, le système est bien équivalent à celui de Neretin :

$$b=\frac{\alpha+\beta+1}{2}\qquad\tau=\frac{\lambda}{2}\qquad\alpha+1=b+c\qquad c=\frac{\alpha-\beta+1}{2}$$

$$\rightarrow\alpha=b+c-1\qquad\beta=b-c$$

$$y=(Sinh(x))^2\Rightarrow Cosh(x)=(1+y)^{\frac{1}{2}}\quad Sin(x)=y^{\frac{1}{2}}\qquad dx=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$f(x)\rightarrow\tilde{f}(y)\qquad F_{\alpha,\beta}(2\tau)\rightarrow g(\tau)$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}g(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(b+c)}2^{2b}\int_0^{+\infty}dy\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2\alpha+1}{2}}(1+y)^{\frac{2\beta+1}{2}}\ \tilde{f}(y){}_2F_1\left(\begin{array}{c}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{array},-y\right)\\ \tilde{f}(y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2\Gamma(b+c)}2^{-2b}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sin(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{array}{c}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{array},-y\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}g(\tau)=\frac{1}{\Gamma(b+c)}\int_0^{+\infty}dy\,y^{b+c-1}(1+y)^{b-c}\ \tilde{f}(y){}_2F_1\left(\begin{array}{c}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{array},-y\right)\\ \tilde{f}(y)=\frac{1}{\pi^2\Gamma(b+c)}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau Sin(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(b+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{array}{c}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{array},-y\right)\end{array}\right.$$

Deux autres formes de cette transformation sont encore présentes dans le livre des auteurs S.B.Yakubovich et Yu.F.Luchko « The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions », formule 7.1 page 121, où il est écrit :

$$\left\{\begin{array}{l}g(\tau)=\int_0^{+\infty}dx\ f(x)x^{\alpha}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\mu+i\tau,\mu-i\tau\\ c\end{array},-x\right)\\ f(x)=\frac{x^{c-\alpha-1}}{\pi^2(\Gamma(c))^2}\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(\tau)\Gamma(\mu+i\tau)\Gamma(\mu-i\tau)\Gamma(c-\mu+i\tau)\Gamma(c-\mu-i\tau){}_2F_1\left(\begin{array}{c}c-\mu+i\tau,c-\mu-i\tau\\ c\end{array},-x\right)\end{array}\right.$$

Et dans le livre de S.B.Yakubovich « Index_Transforms », pages 200 et suivantes, les expressions suivantes s'avèrent être équivalentes :

$$\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{2^{\alpha-2}}{\Gamma(\mu+1)}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\mu+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\mu-i\tau}{2}\right)\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ f(x)x^{\alpha+\mu-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\dfrac{\alpha+\mu+i\tau}{2},\dfrac{\alpha+\mu-i\tau}{2}\\ \mu+1\end{matrix},-x^2\right)\\ f(x)=\dfrac{x^{2(1-\alpha)+\mu}2^{1-\alpha}}{\pi^2\Gamma(\mu+1)}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(\pi\tau)g(\tau)\Gamma\left(1+\dfrac{\mu-\alpha+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\mu-\alpha-i\tau}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}1+\dfrac{\mu-\alpha+i\tau}{2},\dfrac{\mu-\alpha-i\tau}{2}\\ \mu+1\end{matrix},-x^2\right)\end{cases}$$

$$\mu+1\to c \qquad \frac{\alpha+\mu}{2}\to\mu \qquad 1+\frac{\mu-\alpha}{2}=\mu+1-\frac{\alpha+\mu}{2}\to c-\mu \qquad \alpha\to 2\mu-c+1 \qquad \tau\to 2\tau$$

$$1-\alpha\to c-2\mu \qquad \alpha-2\to 2\mu-c-1 \qquad \alpha+\mu-1\to 2\mu-1 \qquad x^2\to y$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} g(2\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dy\ \left\{f(\sqrt{y})y^{\mu-1-\alpha}\right\}y^{\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\mu+i\tau,\mu-i\tau\\ c\end{matrix},-y\right)\\ f(\sqrt{y})y^{\mu-1-\alpha}=\dfrac{y^{c-\mu-1-\alpha}x^{c-1}}{\pi^2(\Gamma(c))^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(2\tau)\left|\Gamma(\mu+i\tau)\Gamma(c-\mu+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-\mu+i\tau,c-\mu-i\tau\\ c\end{matrix},-y\right)\end{cases}$$

Ces deux systèmes sont également équivalents à celui de Neretin, en utilisant les propriétés des transformations linéaires des fonctions hypergéométriques, à savoir :

$$F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix},x\right)=(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a,c-b\\ c\end{matrix},x\right)\Rightarrow{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-\mu+i\tau,c-\mu-i\tau\\ c\end{matrix},-x\right)=(1+x)^{2\mu-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\mu-i\tau,\mu+i\tau\\ c\end{matrix},-x\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ \left\{f(x)x^{\alpha}\right\}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\mu+i\tau,\mu-i\tau\\ c\end{matrix},-x\right)\\ \left\{f(x)x^{\alpha}\right\}=\dfrac{x^{c-1}}{\pi^2(\Gamma(c))^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(\mu+i\tau)\Gamma(c-\mu+i\tau)\right|^2(1+x)^{2\mu-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\mu-i\tau,\mu+i\tau\\ c\end{matrix},-x\right)\end{cases}$$

$$Substitution \qquad \mu\to b \qquad c\to b+c \qquad c-\mu\to c$$

$$\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ \left\{f(x)x^{\alpha}\right\}{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\\ \dfrac{\left\{f(x)x^{\alpha}\right\}}{x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}}=\dfrac{1}{\pi^2(\Gamma(b+c))^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(\mathrm{b}+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\end{cases}$$

$$Posons\ finalement\ h(x)=\frac{\left\{f(x)x^{\alpha}\right\}}{x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}}\Rightarrow\left\{f(x)x^{\alpha}\right\}=h(x)x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} g(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ h(x)x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\\ h(x)=\dfrac{1}{\pi^2(\Gamma(b+c))^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(\mathrm{b}+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ h(x)x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\\ h(x)=\dfrac{1}{\pi^2\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)g(\tau)\left|\Gamma(\mathrm{b}+i\tau)\Gamma(c+i\tau)\right|^2{}_2F_1\left(\begin{matrix}b+i\tau,b-i\tau\\ b+c\end{matrix},-x\right)\end{cases}$$

Une formule due à Jet Wimp, 1964 « A class_of_integral_transforms », formules 4.13 et 4.14 page 38 :

$$\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{\Gamma(\xi-i\tau)\Gamma(\xi+i\tau)}{\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ f(x)x^{\xi-\nu}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right) \\ f(x)=\dfrac{x^{\nu-\sigma}}{\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \dfrac{\tau\ Sinh(2\pi\tau)}{\Gamma(\sigma-i\tau)\Gamma(\sigma+i\tau)\left(Cosh^2(\pi\tau)-Cos^2(\pi\sigma)\right)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\sigma-i\tau,1-\sigma+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)g(\tau)\end{cases}$$

Encore une fois ce système est équivalent à celui donné par Neretin , comme il suit :

$$Cosh^2(\pi\tau)-Cos^2(\pi\sigma)=Sin^2(\pi\sigma)Cosh^2(\pi\tau)+Cos^2(\pi\sigma)Sinh^2(\pi\tau)$$
$$=\left(Sin(\pi\sigma)Cosh(\pi\tau)+iCos(\pi\sigma)Sinh(\pi\tau)\right)\left(Sin(\pi\sigma)Cosh(\pi\tau)-iCos(\pi\sigma)Sinh(\pi\tau)\right)$$
$$=Sin(\pi(\sigma+i\tau))Sin(\pi(\sigma-i\tau))=\frac{\pi^2}{\Gamma(\sigma-i\tau)\Gamma(\sigma+i\tau)\Gamma(1-\sigma-i\tau)\Gamma(1-\sigma+i\tau)}$$
$$\Rightarrow \Gamma(\sigma-i\tau)\Gamma(\sigma+i\tau)\left(Cosh^2(\pi\tau)-Cos^2(\pi\sigma)\right)=\frac{\pi^2}{\Gamma(1-\sigma-i\tau)\Gamma(1-\sigma+i\tau)}$$

De plus $\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\sigma-i\tau,1-\sigma+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)=(1+x)^{\xi+\sigma-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi+i\tau,\xi-i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)=(1+x)^{\xi+\sigma-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{\Gamma(\xi-i\tau)\Gamma(\xi+i\tau)}{\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ \left\{f(x)x^{-\nu}x^{\sigma}(1+x)^{1-\xi-\sigma}\right\}x^{\xi-\sigma}(1+x)^{\xi+\sigma-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)\\ \left\{f(x)x^{-\nu}x^{\sigma}(1+x)^{1-\xi-\sigma}\right\}=\dfrac{1}{\pi^2\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)\Gamma(1-\sigma-i\tau)\Gamma(1-\sigma+i\tau)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)g(\tau)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ \left\{f(x)x^{-\nu}x^{\sigma}(1+x)^{1-\xi-\sigma}\right\}x^{\xi-\sigma}(1+x)^{\xi+\sigma-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)\\ \left\{f(x)x^{-\nu}x^{\sigma}(1+x)^{1-\xi-\sigma}\right\}=\dfrac{1}{\pi^2\Gamma(1+\xi-\sigma)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)\left|\Gamma(1-\sigma-i\tau)\Gamma(\xi-i\tau)\right|^2\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\xi-i\tau,\xi+i\tau\\1+\xi-\sigma\end{matrix},-x\right)g(\tau)\end{cases}$$

Il reste à effectuer quelques dernières substitutions pour retrouver le système de transformations de Neretin :

$$b=\xi \qquad c=1-\sigma \qquad \left\{f(x)x^{-\nu}x^{\sigma}(1+x)^{1-\xi-\sigma}\right\}\to h(x)$$

$$\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\ h(x)x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b-i\tau,b+i\tau\\b+c\end{matrix},-x\right)\\ h(x)=\dfrac{1}{\pi^2\Gamma(b+c)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\ \tau\ Sinh(2\pi\tau)\left|\Gamma(b-i\tau)\Gamma(c-i\tau)\right|^2\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b-i\tau,b+i\tau\\b+c\end{matrix},-x\right)g(\tau)\end{cases}$$

On voit donc que beaucoup d'articles présentent des transformations en apparence différentes mais qui en réalité sont les mêmes. On peut également conclure que le système donné par Neretin apparaît donc comme étant dans sa forme la plus simple. Par ailleurs notons que la fonction ${}_2F_1\left(\begin{matrix}b-i\tau,b+i\tau\\b+c\end{matrix},-x\right)$ *est apparentée à une fonction de Jacobi (définition hypergéométrique et non elliptique), la raison pour laquelle la transformation est également appelée « Transformation intégrale de Jacobi ou de Fourier-Jacobi » par certains auteurs.*

<u>*Forme simplifiée de la Transformation d'Olevskyi b=c*</u>

Avec b=c, il vient :

$$\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(2b)}\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ f(x)x^{2b-1}\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi\Gamma(2b)}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ g(\tau)\dfrac{|\Gamma(b+i\tau)|^4}{|\Gamma(2i\tau)|^2}\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$|\Gamma(2i\tau)|^2=\frac{\Gamma(2i\tau)\Gamma(1-2i\tau)}{-2i\tau}=\frac{\pi}{2\tau\,Sin(2\pi\tau)}\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(2b)}\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ f(x)x^{2b-1}\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \\ f(x)=\dfrac{1}{\pi^2\Gamma(2b)}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sin(2\pi\tau)g(\tau)|\Gamma(b+i\tau)|^4\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\Rightarrow\begin{cases} g(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\ f(x)x^{2b-1}\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \\ f(x)=\dfrac{1}{\pi^2(\Gamma(2b))^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\ \tau\,Sin(2\pi\tau)g(\tau)|\Gamma(b+i\tau)|^4\,{}_2F_1\begin{pmatrix} b+i\tau,b-i\tau \\ 2b \end{pmatrix},-x\end{pmatrix} \end{cases}$$